Universiteit Gent

Faculteit Letteren en Wijsbegeerte

Vakgroep Wijsbegeerte en Moraalwetenschap

Academiejaar 2004–2005

Prospectieve Dynamiek.

Filosofische en technische onderbouwing van doelgerichte bewijzen en bewijsheuristieken.

Proefschrift ingediend tot het behalen van de graad van Doctor in de Wijsbegeerte

door Dagmar Provijn

Promotor: Professor dr. Diderik Batens

Inhoudsopgave

Woord Vooraf

Dit proefschrift is ontstaan uit de interesse die ik gedurende mijn 'aanwezigheid' en tewerkstelling in het 'Centrum voor Logica en Wetenschapsfilosofie' heb ontwikkeld voor de formele beschrijving van de redeneerprocessen die gepaard gaan met het uitwerken van formele bewijzen. Ik heb hiertoe de kans gekregen door mijn aanstelling als doctoraatsbursaal op het FWO-project

'Filosofische en technische onderbouwing van het adaptief programma, verder incorporeren van logische mechanismen en verdere uitwerking van systemen en toepassingen.'

Het brede opzet van dit project heeft me toegelaten verschillende aspecten van het logische onderzoeksdomein te proeven, om vanuit die waaier van mogelijkheden te komen tot één onderwerp dat mijn volle aandacht en interesse kon genieten. Hoewel het dit keer niet rechtstreeks over adaptieve logica's gaat, vormen deze toch een belangrijke bron voor de ontwikkeling van doelgerichte bewijzen aan de hand van de idee van 'prospectieve dynamiek'. Die laatste laat niet alleen toe de redeneerprocessen die impliciet aanwezig zijn bij het maken van een logisch bewijs op te nemen in de bewijzen zelf, maar biedt tevens de kans om bewijsheuristieken te ontwikkelen die nauw verbonden zijn met het toegepaste regelsysteem. Enerzijds kom ik hiermee tegemoet aan de kritiek van Hintikka dat er vaak een al te sterke nadruk wordt gelegd op de 'regels' van het spel, en niet op de 'kunst' van het uitvoeren ervan. Anderzijds wil ik hier aantonen dat het best mogelijk is om de 'regelsystemen' en 'heuristieken' voor verschillende logica's uit te werken en te combineren tot een doelgerichte bewijsprocedure voor elkeen ervan. Het onderscheid tussen beide is binnen deze bewijsprocedures veel minder sterk dan Hintikka insinueert.

Nu het er naar uitziet dat dit werk toch tot een einde zal komen wil deze 'prutsende mens' – niet in het minst – een aantal woorden van dank uiten.

Eerst zijn er de mensen van het 'Centrum' die het elke dag opnieuw mogelijk maken om in een aangename sfeer te vertoeven en die altijd wel klaar staan voor een hulp, hier en daar.

Speciale dank gaat uit naar Peter Verdée die zich de laatste weken heeft ingespannen om een aantal punten uit dit werk grondig na te zien en natuurlijk ook naar Tim De Mey die zowel op de werkvloer als daarbuiten steeds een grote steun is geweest en nog altijd is natuurlijk. Ook Erik Weber, Joke Meheus en Diderik Batens verdienen speciale woorden van dank. Niet alleen omdat ze mij de kans gaven deel uit te maken van het 'Centrum', maar ook en vooral voor het leuke samenwerken, de aanmoedigingen en het vertrouwen dat ze in me hebben gesteld.

Om af te ronden wil ik zeker mijn ouders, zus en schoonbroer bedanken die me steeds in mijn keuzes hebben gesteund en aangemoedigd. En 'last but not least' een dikke kus voor Eva die zelfs van de dagen waarop ik het wat moeilijker had, een waar feest wist te maken.

Ik draag dit werk op aan m'n grootvader, die me bij elk bezoek vroeg "wat is logica nu eigenlijk en wat ermee aan te vangen"; een vraag waarop ik blijkbaar nooit een bevredigend antwoord heb kunnen geven. Toch zou hij uitermate blij geweest zijn met het feit dat ik dit werk heb kunnen voltooien.

Dagmar Provijn

Gent, februari 2005.

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Hintikka's kritiek en de kritiek op Hintikka

Wie een bewijs wil of moet maken staat, althans volgens Hintikka, voor ruwweg dezelfde cognitieve taak als een schaker – zie [29], [30]. Hintikka's analogie gaat terug op het onderscheid tussen 'definiërende regels' en 'strategieën'. Definiërende regels corresponderen in het schaakspel met de toegelaten zetten: daar waar torens bijvoorbeeld langs horizontale of verticale lijnen kunnen worden voortbewogen, mogen door lopers enkel diagonale trajecten worden afgelegd. Het spreekt voor zich dat het ondoordacht doch correct toepassen van willekeurige definiërende regels zelden of nooit zal leiden tot het schaak, laat staan het schaakmat zetten van de tegenspeler. Daartoe zijn strategieën nodig, i.e. weldoordachte inschattingen van de opeenvolgende zetten die het einddoel (het schaakmat zetten van de tegenspeler) of subdoelen (bijvoorbeeld het schaak zetten van de tegenspeler om een mogelijke rokade te barreren) zo efficiënt mogelijk helpen realiseren.

Bij de opbouw van een bewijs is het volgens Hintikka net zo. 'Definiërend' zijn de inferentieregels: zij bepalen van meet af aan welke stappen gezet kunnen worden. Minimale ervaring met het aanleren van bewijzen aan studenten leert dat het quasi-blindelings doch correcte toepassen van willekeurige inferentieregels weliswaar in een eerste fase instructief kan zijn, maar dat een dergelijke 'aanpak' van zodra een opgave enige complexiteit heeft, onmiskenbaar ontoereikend is en ook door studenten als zodanig wordt ervaren. Om een opgave met enige complexiteit aan te pakken is veeleer een strategie nodig, i.e. een methode om uit te maken hoe het einddoel of de subdoelen zo efficiënt mogelijk kunnen worden bekomen.

In tegenstelling tot de definiërende regels kunnen deze strategieën volgens Hintikka niet refereren aan afzonderlijk stappen. Ze zullen op zijn minst moeten verwijzen naar volledige strategieën of althans delen ervan, i.e. naar reeksen van stappen. Hij gaat er dan ook van uit dat de optimale strategische regels nooit op een recursieve manier geformuleerd kunnen worden. In het beste geval kunnen ze als algemene principes worden beschreven die men in gedachte moet houden bij de constructie van een bewijs. Impliciet gaat Hintikka er hierbij van uit dat elke formule die uit de premissen afleidbaar is, in om het even welk bewijs uit die premissen afleidbaar moet zijn. Hierdoor kunnen geen strikte eisen worden gesteld met betrekking tot een bewijs van een doel uit een verzameling premissen (hetgeen we vanaf nu afkorten met $\Gamma \vdash G$). Deze eisen kunnen nochtans een inperking instellen op de formules die we willen afleiden met het oog op het gestelde doel en ervoor zorgen dat enkel nuttige inferenties worden gemaakt.

Hintikka's analogie tussen bewijzen maken en schaken fungeert echter als een soort boemerang. Zij laat niet alleen toe Hintikka's punt te verduidelijken dat strategieën enkel als een geheel van met elkaar verbonden principes kunnen worden bestudeerd. De analogie kan ook de kritiek erop of misschien zelfs het tegendeel ervan illustreren. Een schaakspel start steeds met een identieke beginsituatie en met een exclusief doel. Daar waar de 'definiërende regels' (bijvoorbeeld: de toegelaten stappen) natuurlijk niet weggecijferd kunnen worden, is strategie (bijvoorbeeld: flexibiliteit bij het verwerken en anticiperen van de stappen van de tegenspeler) van primordiaal belang. Indien we zoeken naar de inferentie van een specifiek doel uit een gegeven aantal premissen, dan bevat dat doel steeds de nodige informatie om te weten welke stappen zinnig zijn om het te bereiken. Maar indien we volgehouden redeneren vanuit het uiteindelijke doel kunnen we niet alleen onmiddellijk bepalen welke inferentiestappen of 'definiërende regels' nuttig zijn voor het bereiken ervan; we kunnen ook uitmaken welke premissen van belang zijn en welke subformules eruit moeten worden gedistilleerd.

Indien we er net als Hintikka van uitgaan dat het gebruik van strategieën onmiddellijk moet resulteren in een elegant en succesvol bewijs en daarbovenop de eis stellen dat elke formule die afleidbaar is uit de verzameling premissen wel degelijk afleidbaar moet zijn in een bewijs voor $\Gamma \vdash G$, dan is de formulering van strategische regels – en zelfs van strategische principes – een uitermate complexe aangelegenheid. Nemen we echter 'genoegen' met een bewijsprocedure voor de constructie van een bewijs voor $\Gamma \vdash G$, waarbij 'zoekstappen' worden opgenomen in de bewijzen en waardoor zelfs 'doodlopende zoekpaden' worden weergegeven, dan blijkt de formulering van strategische regels heel wat eenvoudiger. Dat dergelijke 'doodlopende zoekpaden' en 'zoekstappen' niet zijn opgenomen in bewijzen volgens het klassieke bewijsformaat, heeft respectievelijk te maken met het feit dat auteurs worden verondersteld om overtuigende bewijzen weer te geven, en dat de definitie voor een 'klassiek bewijs' net gericht is op het neerschrijven van dergelijke bewijzen – i.e. bewijzen die op een overtuigende en heldere manier weergeven dat een conclusie volgt uit de gegeven verzameling premissen.

In dit proefschrift wordt een bewijsformaat ontwikkeld dat toelaat de 'zoekstappen' op te nemen in de bewijzen zelf. Hierdoor wordt een deel van de bewijsprocedure in de bewijzen zelf opgenomen. Bovendien richten de verschillende bewijsprocedures die worden ontwikkeld aan de hand van het nieuwe bewijsformaat zich van meet af aan daadwerkelijk op het doel en wordt getracht enkel die inferenties toe te laten die van nut kunnen zijn voor de afleiding ervan.

1.2 De Bron: Dynamische Bewijzen uit het Adaptief Logica Programma

Op het eerste gezicht is deze scriptie een vreemde eend in de bijt. Nochtans sluiten zowel de doelstellingen ervan als de technieken die aangewend worden om die doelstellingen te realiseren, nauw aan bij wat de afgelopen jaren het 'adaptief logica programma' is gaan heten – zie [7], [8], [10] en [12].

In dit proefschrift schaar ik mij vooreerst achter een pluralistische interpretatie van de logica als onderzoeksdomein, waarbij de ontwikkeling van een veelheid aan formele systemen die ons in staat stellen om menselijke redeneringen op hun correctheid te beoordelen als doel wordt opgevat. Naast dit normatieve aspect moet de logica tevens de descriptieve eis in kunnen willigen dat de regels en definities die vastleggen wat een bewijs van een conclusie uit een verzameling premissen is zo zijn geconstrueerd dat de bewijzen een explicatie[1] vormen voor de redeneringen die ze moeten beoordelen.

De dynamische bewijzen van adaptieve logica's dienen in dit opzicht een explicatie te bieden voor redeneringen die in termen van hun gevolgrelaties geen positieve test bezitten. Redeneerprocessen waarin dergelijke gevolgrelaties worden toegepast, bezitten zowel een externe als interne dynamiek. De eerste is wel gekend en goed gedocumenteerd in de vakliteratuur van de logica en komt erop neer dat wanneer nieuwe premissen worden toegevoegd, bepaalde gevolgen van de initiële premissenverzameling kunnen wegvallen in de gevolgverzameling. Deze dynamiek vloeit voort uit het niet-monotone karakter (het feit dat voor sommige Γ, Δ en A wel geldt dat $\Gamma \vdash A$, maar niet $\Gamma \cup \Delta \vdash A$) van deze gevolgrelaties. De interne dynamiek is echter veel minder beschreven en verschilt grondig van de vorige. Voor elke gevolgrelatie geldt dat we slechts inzicht kunnen krijgen in de premissen als we er gevolgen uit trekken. Wanneer een gevolgrelatie geen positieve test bezit, dan geeft dit aanleiding tot een interne dynamiek, zelfs als de verzameling premissen onveranderd blijft. Deze komt er meer bepaald op neer dat bepaalde formules die op een specifiek stadium van het redeneerproces *wel* als afgeleid worden beschouwd, terwijl dit op een later stadium *niet* meer zo is.

In termen van adaptieve logica's wordt de interne dynamiek verwezenlijkt door aan elke afgeleide formule een conditie te koppelen (die tevens leeg kan

[1]De notie 'explicatie' komt origineel uit Carnaps [24]. Zoals voorgesteld in [12] komt dit in verkorte en minder precieze termen neer op het volgende: een explicatie is helder en precies en vertoont sterke gelijkenissen met het explicandum.

zijn). In deze condities bevinden zich de formules die verondersteld worden zich normaal te gedragen ten opzichte van de premissen opdat de afgeleide formule daadwerkelijk als afgeleid mag worden beschouwd. In vaktermen hebben we het hier over de abnormaliteiten. Blijkt zo'n formule zich toch abnormaal te gedragen, dan voorziet de adaptieve logica in kwestie in een markeringsdefinitie die de lijn markeert waarop de abnormaleit in de conditie voorkomt. Dient deze abnormaliteit op een later stadium zelf herroepen te worden wegens verdere inzichten in de premissen, dan kan deze lijn terug gedemarkeerd worden. Aldus kan worden bepaald welke lijnen op een stadium van het bewijs zijn gemarkeerd en dus als niet afgeleid worden beschouwd op dat specifieke stadium. Dat mensen in het uitvoeren van redeneringen die gekenmerkt zijn door dergelijke gevolgrelaties wel eens vergissingen maken vloeit voort uit het feit dat ze de condities, verbonden aan de beweringen die ze hebben afgeleid, overzien of gewoonweg vergeten. Zodoende is het mogelijk dat eerder getrokken conclusies niet worden herroepen of herroepen conclusies ten onrechte als dusdanig beschouwd blijven worden. In dit opzicht vormen de dynamische bewijzen van de adaptieve logica's een idealisering van de eigenlijke redeneerprocessen. Dit vloeit voort uit het feit dat de geannoteerde bewijzen door de controle die wordt ingebouwd aan de hand van het expliciet weergeven van de condities en de markeringsdefinities die hierop ingrijpen, complexer zijn dan de overeenkomstige redeneerprocessen. Dat laatste geldt echter voor alle logica's.

Het is duidelijk dat de condities een negatieve functie vervullen in de dynamische bewijzen: een formule is afleidbaar onder de voorwaarde dat een aantal andere formules dat niet zijn. Aan de oorsprong van dit werk ligt de positieve invulling van deze condities, i.e. een formule is afleidbaar als bepaalde andere formules kunnen worden afgeleid uit de premissen. Beschouwen we de functie van een bewijs als een manier om aan te tonen dat een welbepaalde conclusie kan worden afgeleid uit een verzameling premissen, wat een doelgerichte activiteit is (die meer of minder efficiënt kan verlopen), dan blijkt de introductie van positieve condities ons toe te laten om de zoekstappen die in functie staan van dit doel op te nemen in het bewijs zelf. Doordat we in het bewijs kunnen neerschrijven dat een bepaalde formule afleidbaar is als ook een aantal andere formules dat zijn, kunnen we het verder verloop van het bewijs richting geven aan de hand van de formules in de condities. Door deze als doel te stellen, geven we op voorhand aan in welke zin de premissen moeten geanalyseerd worden en kunnen we zelfs uitmaken welke premissen van nut kunnen zijn voor de afleiding van de gestelde doelen.

Ook de markeringsdefinities krijgen een positieve invulling. Ofwel geven ze aan dat een zoekpad niet verder dient uitgediept te worden omdat een van de formules in een conditie niet kan worden afgeleid, waardoor ze ons terug op het juiste pad zetten in ons zoekproces. Ofwel geven ze aan dat een bepaalde formule niet verder dient gezocht te worden omdat ze reeds niet-conditioneel is afgeleid. De markeringen zijn hier bovendien finaal. In dit opzicht spreken we dan ook van 'vooruitlopende' of 'prospectieve dynamiek'. Doordat het nieuwe bewijsformaat voornamelijk steunt op het integreren van de zoekstappen die aanwezig zijn in het maken van een formeel bewijs, kunnen deze een explicatie vormen voor de doelgerichte manier waarop sommige logici zoeken naar bewijzen en hoe ze dit aanleren aan hun studenten.

1.3 Natuurlijke Heuristieken

Ik richt mij in dit werk tevens op de ontwikkeling van natuurlijke heuristische methodes in combinatie met het nieuwe bewijsformaat dat toelaat zoekstappen in de bewijzen op te nemen. Dat het laatste mogelijk is, toont dat het bewijsformaat op zich reeds een heuristische waarde bezit – meer bepaald dat het door zijn specifieke opbouw toelaat een eenvoudige en doorzichtige natuurlijke bewijsheuristiek te formuleren. Dit vloeit voort uit het feit dat heuristische methodes – die bestaan uit een verzameling instructies die in een bepaalde volgorde dienen uitgevoerd te worden – zich zowel richten op de verschillende componenten waaruit het bewijs is opgebouwd als op aspecten van het bewijsformaat zelf. Nog belangrijker is het als ze kunnen verwijzen naar het hoofddoel of lokale doelen.

Wat een natuurlijke bewijsheuristiek precies inhoudt, verduidelijken we aan de hand van de karakterisering die ervan wordt gegeven in [4] – zie pagina's 338-341. Een natuurlijke bewijsheuristiek moet voldoen aan de volgende voorwaarden:

(i) ze moet doelgericht zijn,
(ii) ze moet algoritmisch verlopen in zoverre dit mogelijk is,
(iii) ze moet inzicht in het zoekproces naar bewijzen belichamen, en
(iv) ze moet de mogelijkheid bieden dusdanig uitgebreid te worden dat meer inzicht in het maken van bewijzen kan worden ingebouwd.

Daarenboven moet ze in overeenstemming zijn met de manier waarop mensen bewijzen zoeken wanneer ze dit onbewust doen. Met dit laatste wordt geenszins verwezen naar aangeboren heuristische methoden om te redeneren, wel naar intuïties die resulteren uit opgedane ervaring binnen het relevante domein – die in dit geval neerkomt op bewijzen en zoekprocessen die we zijn tegengekomen en hebben onderzocht en die ons hebben geleid in onze pogingen om ze te imiteren of reproduceren.

Als een natuurlijke bewijsheuristiek inzicht bevat, dan zal ze aanleiding geven tot een bewijs indien er hiervoor een algoritme beschikbaar is. Vervolgens dient ze contextueel te zijn. Om hieraan te voldoen moeten haar reacties afhankelijk zijn van het gestelde probleem dat wordt samengesteld uit de verzameling premissen, het hoofddoel, subdoelen en reeds afgeleide formules. Dat een natuurlijke bewijsheuristiek meer inzicht bevat wordt in relatie gebracht met de volgende elementen van de bewijzen die erdoor worden voortgebracht:

(i) ze zijn korter,
(ii) ze bevatten minder onnodige stappen,
(iii) de introductie van subbewijzen wordt zoveel mogelijk achterwege gelaten, zeker als ze in functie staan van de afleiding van een inconsistentie,
(iv) ze verlopen op een meer doelgerichte wijze, en
(v) ze lichten het gebruik van meer complexe inferentieregels toe.

1.4 Structuur

In deze verhandeling zullen de volgende logica's worden beschreven in termen van prospectieve dynamiek.

In hoofdstuk 2 wordt een doelgerichte bewijsprocedure uitgewerkt voor het propositioneel fragment van de klassieke logica. Hiervoor werd zowel een regelsysteem als een heuristiek uitgewerkt. We verwijzen naar deze procedure met de naam **PCLc** waarbij **PCL** verwijst naar 'propositional classical logic' en de de **c** naar de condities die al dan niet worden gelinkt aan de formules in het tweede element van een lijn in een bewijs. Ik kan hierbij verwijzen naar het feit dat de specifieke uitwerking van het systeem – zoals reeds gebeurde in [21] – aanleiding gaf tot de uitwerking van een paraconsistente bewijsprocedure in [16]. Deze heeft als specifieke eigenschap dat ze dezelfde gevolgrelatie heeft als **PCL** in het consistente geval en eigenlijk steunt op het wegvallen van 'Ex Falso Quodlibet' in het inconsistente geval aangezien EFQ geïsoleerd wordt in **PCLc**.

Hoofdstuk 3 bevat een regelsysteem voor de volledige klassieke logica en bestaat uit de uitbreiding van **PCLc** met de regels voor de quantoren. Een heuristiek werd nog niet uitgewerkt. We verwijzen naar dit regelsyteem met de aanduiding **CLc**. In bijlage A wordt een alternatieve aanpak beschreven met gebruik van skolemisatie.

Vervolgens wordt een doelgerichte bewijsprocedure uitgewerkt voor de logica **PCR** in hoofdstuk 4. Deze logica werd ontwikkeld met het oog op de formalisatie van implicatieve zinnen uit de natuurlijke taal in [5]. De bewijsprocedure krijgt de naam **PCLRc**.

Na de ontwikkeling van **PCLRc** had ik een aantal middelen die het mogelijk maakten op een behoorlijk eenvoudige manier de intuïtionistische oordeelslogica van een doelgerichte bewijsprocedure te voorzien. Deze wordt uiteengezet in hoofdstuk 5 en wordt aangeduid als **IPCLc**.

In bijlage C is het regelsysteem **PCI1** voor de klassieke oordeelslogica uit [5] opgenomen daar ik in de tekst regelmatig verwijs naar een aantal regels uit dit systeem.

Hoofdstuk 2

Prospectieve Dynamiek in het Propositioneel fragment van de Klassieke Logica

In dit hoofdstuk wordt een doelgerichte bewijsprocedure voorgesteld voor het propositioneel fragment van de klassieke logica (**PCL**). Deze steunt voornamelijk op een nieuw bewijsformaat dat is ontwikkeld op basis van een aantal technieken die reeds zijn toegepast in de dynamische bewijzen van het adaptieve logica programma. Het bewijsformaat heeft drie voordelen. Vooreerst laat het toe een prospectieve dynamiek te introduceren in formele bewijzen. Vervolgens laat het toe een regelsysteem te ontwikkelen waarin constructieve stappen overbodig zijn. En 'last but not least' biedt het de mogelijkheid een eenvoudige en doorzichtige bewijsheuristiek te formuleren die garant staat voor doelgerichte en efficiënte bewijzen. Er zal worden aangetoond dat de resulterende doelgerichte bewijsprocedure een beslissingsmethode vormt voor $A_1, \ldots A_n \vdash B$ en een positieve test voor $\Gamma \vdash A$.

Vooraleer van start te gaan met de beschrijving van het bewijsformaat is het nuttig te benadrukken dat ik mij toespits op één van de mogelijke doelen van logische bewijzen, i.e. aantonen dat een specifieke conclusie G afleidbaar is uit een verzameling premissen Γ – met andere woorden de constructie van een bewijs voor $\Gamma \vdash G$. In wat volgt noemen we G het hoofddoel van het bewijs.

2.1 Een bewijsformaat voor de implementatie van zoekstappen in bewijzen

Het hoofddoel voor de ontwikkeling van het nieuwe bewijsformaat is het opnemen van redeneerprocessen of zoekstappen die in het klassieke bewijsformaat achterwege worden gelaten omdat ze mogelijk niet succesvol zijn. De achterliggende gedachte is om op die manier meer inzicht te krijgen in en meer controle te verwerven over het proces dat achter de constructie van een bewijs voor $\Gamma \vdash G$ schuilgaat. Dat het hierbij om een doelgericht proces gaat, is gemakkelijk in te zien; dat het tevens meer of minder efficiënt kan verlopen des te meer.

Om het centrale idee achter het bewijsformaat te verhelderen stel ik voor uit te gaan van een voorbeeld. Beschouw een **PCL**-bewijs dat vertrekt uit de volgende verzameling premissen: $\Gamma = \{(p \wedge q) \supset r, p \wedge s, {\sim}s \vee t, t \supset q, u \supset (r \wedge t)\}$.

1	$(p \wedge q) \supset r$	Prem
2	$p \wedge s$	Prem
3	${\sim}s \vee t$	Prem
4	$t \supset q$	Prem
5	$u \supset (r \wedge t)$	Prem

Stel dat s het hoofddoel is van het zoekproces, dan hoeft men enkel op zoek te gaan naar een premisse waaruit s kan worden afgeleid. Daar s in dit geval een subformule is van een conjunctie, is het zoekproces algauw afgelopen door toepassing van de conjunctie-eliminerende regel.

Is t daarentegen het hoofddoel, dan is het al vlug duidelijk dat er geen premisse is waaruit het hoofddoel onmiddellijk kan worden afgeleid. Toch weten we door de premisse op lijn 3 dat t afleidbaar is indien ook s afleidbaar is uit de premissen. Uit het vorige weten we dat dit het geval is en zodoende kunnen we t afleiden uit de premissen.

Niettegenstaande de eenvoud van het voorbeeld, kan aangetoond worden dat de complexiteit van het zoekproces al vlug toeneemt indien we $r \wedge t$ als hoofddoel vooropstellen. In eerste instantie blijkt dat het hoofddoel kan worden afgeleid indien ook u afleidbaar is uit Γ. Daar u echter niet verder voorkomt als subformule in één van de premissen, is dit een vruchteloos pad in het zoekproces. Om nu verder te gaan op een doelgerichte manier blijkt het afzonderlijk zoeken naar r en t de enige optie met het oog op de toepassing van de conjunctie-introducerende regel. De afleiding van t werd hiervoor besproken; r blijkt enkel afleidbaar indien ook $p \wedge q$ afleidbaar is uit de premissen. Opnieuw dienen we op zoek te gaan naar p en q afzonderlijk. De afleidbaarheid van p is al even evident als die van s; q blijkt enkel afleidbaar onder de voorwaarde dat t kan worden afgeleid, wat hier het geval is.

Het is duidelijk dat we bij het zoeken naar een bewijs voor $\Gamma \vdash G$ in een zoekproces verzeilen waarvan vele zoekpaden vruchteloos kunnen zijn en dat in meerdere of mindere mate complex kan zijn al naar gelang de complexiteit van de premissen en de omvang van Γ. Wat jammer is aan de hele zaak is dat dit zoekproces niet is opgenomen in de bewijzen zelf. Indien het zoekproces vrij complex is, zal men zich al vlug genoodzaakt zien kanttekeningen te maken bij het bewijs indien men dit enigszins doelgericht wil laten verlopen.

Toch is er een mechanisme – ontleend aan de geannoteerde dynamische bewijzen in het adaptieve logica programma – dat toelaat zoekstappen op te nemen in de bewijzen zelf. Meer specifiek gaat het hier om het introduceren van een conditie die wordt gekoppeld aan de formule in het tweede element van de lijnen van het bewijs. In tegenstelling tot de voorwaarden uit de dynamische bewijzen in het adaptieve logica programma, krijgen deze hier een positieve invulling. Een lijn waarvan de conditie niet leeg is, geeft dan ook aan dat de formule in het tweede element van de lijn afleidbaar is uit Γ van zodra de formules in de conditie eruit afleidbaar zijn.

Het zoekproces voor de afleiding van r zou dan ook als volgt kunnen worden opgenomen in het bewijs.

6	$[u]r \wedge t$	5	$\supset$E
7	$[p \wedge q]r$	1	$\supset$E
8	$[p, q]r$	7	C$\wedge$E
9	p	2	$\wedge$E
10	$[q]r$	8,9	Trans
11	$[t]q$	4	$\supset$E
12	$[s]t$	3	$\vee$E
13	s	2	$\wedge$E
14	t	12,13	Trans
15	q	11,14	Trans
16	r	10,15	Trans

Elke conditie vervult een dubbele functie. Vooreerst geeft ze aan dat de formule in het tweede element van een lijn nog niet is afgeleid uit Γ, maar dat deze wel kan worden afgeleid indien de formules in de conditie zelf niet-conditioneel kunnen worden afgeleid. Ten tweede draagt ze een heuristische functie met zich mee: ze herinnert ons eraan welke formules moeten worden gezocht in functie van het af te leiden hoofddoel of eruit voortvloeiende subdoelen.

Als ik stel dat het zoekproces kan worden opgenomen in de bewijzen zelf, dan bedoel ik daar geenszins mee dat het bewijs gewoonweg onderbroken mag worden voor het invoegen van een aantal lijnen die betrekking hebben op het zoekproces. Integendeel, elke lijn in het bewijsformaat verwijst naar een specifieke uitdrukking die informatie verschaft over 'afleidbaarheid uit de premissen'. Dat een formule A werd afgeleid op de conditie Δ – die steeds een eindige verzameling formules is – korten we van nu af aan af door middel van $[\Delta]A$. De regels van de bewijstheorie, die zal worden ontwikkeld in functie van het bewijsformaat, zullen dan ook aan de volgende eis voldoen:

(†) Als $[\Delta]A$ afleidbaar is uit een verzameling premissen Γ dan $\Gamma \cup \Delta \vdash A$.

Voor **PCL** en andere logica's waarvoor het Deductietheorema geldt, kan dit geherformuleerd worden als $\Gamma \vdash \bigwedge(\Delta) \supset A$. Maar zelfs als het bewijsformaat wordt toegepast op een logica waarvoor het Deductietheorema niet geldt, is $\Gamma \cup \Delta \vdash A$ een zinnige stap met betrekking tot Cut.[1]

Alvorens over te gaan tot het formuleren van de bewijstheorie, dienen nog een aantal essentiële punten te worden aangestipt en uitgewerkt.

Laten we ons eerst nog eens concentreren op het doelgerichte karakter van het zoekproces achter $\Gamma \vdash G$. Bij aanvang van het bewijs is het hoofddoel G de enige formule die we trachten af te leiden. Dit kan als volgt worden weergegeven in het bewijs:

1	$[G]G$	Doel

Merk eerst en vooral op dat deze stap in overeenstemming is met eis (†); voor om het even welke G en Γ geldt namelijk $\Gamma \cup \{G\} \vdash G$. Vervolgens herinnert $[G]$ ons eraan dat G de formule is die we trachten te bekomen op basis van het zoekproces (i.e. in het verloop van het bewijs). Zoals mag verwacht worden van een doelgericht bewijsformaat, zal de Doel-regel dan ook steeds als eerste worden toegepast in een bewijs. Deze stap vervult tevens een belangrijke rol in de verdere uitbouw van de doelgerichtheid van het bewijsformaat. Door $[G]G$ op de eerste lijn in te voeren, zijn we in staat om met de Premisse-regel net die leden van Γ in het bewijs te introduceren die van nut zijn voor het afleiden van het hoofddoel – zie 2.1.2. Het doelgerichte karakter van het bewijsformaat kan dan ook als volgt worden gerealiseerd: tracht op elk stadium van het bewijs de formules af te leiden die voorkomen in de conditie van een bepaalde lijn.

Twee problemen vloeien hieruit voort:

(i) Is het steeds noodzakelijk om alle leden van een conditie als doel van een zoekproces te stellen? (zie afdeling 2.1.1)

(ii) Welke stappen dient men te ondernemen wanneer men een specifieke formule wenst af te leiden? (zie afdeling 2.1.2)

2.1.1 Markeren van redundante en doodlopende zoekpaden

Het eerste probleem is best eenvoudig aan te pakken aan de hand van een andere techniek die wordt overgenomen uit het adaptieve logica programma, namelijk de markeringsdefinities. Veronderstel dat zowel $[\Delta]A$ als $[\Delta \cup \Delta']A$ zijn afgeleid in een bewijs, waarbij Δ en Δ' van elkaar onderscheiden zijn. Het is duidelijk dat we in dit geval niet op zoek hoeven te gaan naar de leden van Δ' daar dit enkel aanleiding geeft tot redundante zoekpaden. Om dit aan te duiden in het bewijs worden lijnen, waarvan de conditie overtollige elementen bevat, gemarkeerd – zie 2.3.2. Het is tevens mogelijk en nuttig een markeringsdefinitie in te voeren voor de markering van doodlopende paden in het zoekproces – zie 2.3.3. Stel bijvoorbeeld dat de primitieve formules B en C voorkomen in de

[1] Deletional Cut: $\Gamma \vdash A$, $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ / $\Gamma \vdash B$ – zie [25].

conditie op de lijn met als tweede element $[\Delta]A$ en dat na enkele verdere stappen in het bewijs blijkt dat B niet afleidbaar is uit Γ. Dan heeft het natuurlijk geen enkele zin om daarna nog een zoekproces te starten waarbij C of enige andere formule uit Δ als doel wordt gesteld. Indien we bij de markering aangeven welke formule aan de basis ligt van het doodlopen van het pad, dan kan deze informatie ook in het verdere verloop van het bewijs worden aangewend. Blijkt dat B tevens lid is van $[\Delta']D$ in hetzelfde bewijs, dan kan deze lijn onmiddellijk gemarkeerd worden als doodlopend pad. Komt echter C voor in Δ', in plaats van B, dan kunnen we alsnog een zoekproces starten voor het afleiden van C.[2]

2.1.2 Doelgerichte selectie van premissen en formules

Het tweede probleem vraagt wat meer aandacht. Stel dat A een element is van een conditie in een niet-gemarkeerde lijn van een bewijs. Veronderstel daarbij dat A voorkomt in een premisse of in een afgeleide formule. Hebben we dan voldoende redenen om op deze premisse of formule in te werken? Niet noodzakelijk natuurlijk. De vraag die men zich dient te stellen is of A daadwerkelijk uit deze premisse of formule kan worden afgeleid. Tracht men bijvoorbeeld p af te leiden en $\sim p \vee q$ komt voor in het bewijs, dan is er geen enkele reden om in te werken op $\sim p \vee q$ aangezien er geen efficiënte manier is om p eruit af te leiden.[3] Een premisse zal enkel worden geïntroduceerd indien blijkt dat een element uit een conditie er een 'positief deel' van is, hetgeen betekent dat dit specifieke doel al dan niet met een lege conditie uit deze premisse afleidbaar is. De recursieve definitie voor de 'positief deel'-relatie wordt gegeven in de uitwerking van het regelsysteem – zie 2.2.2. Bekijken we opnieuw het voorbeeld voor de afleiding van $r \wedge t$, dan bekomen we nu het volgende resultaat:

1	$[r \wedge t]r \wedge t$		Doel	R20
2	$u \supset (r \wedge t)$		Prem	
3	$[u]r \wedge t$	2	$\supset$E	$u\|$ R20
4	$[r, t]r \wedge t$	1	C$\wedge$E	R19
5	$(p \wedge q) \supset r$		Prem	
6	$[p \wedge q]r$	5	$\supset$E	R18
7	$[p, q]r$	6	C$\wedge$E	R10
8	$p \wedge s$		Prem	

[2] We maken hierbij twee opmerkingen. Voor wie vertrouwd is met het adaptieve logica programma wijzen we erop dat naast de voorwaarden, ook de markeringsregels hier een andere functie vervullen – voor de markering in adaptieve logica's, zie 1. Het is duidelijk dat de markeringsdefinities in de context van doelgerichte bewijzen eerder heuristisch van aard zijn daar ze verwijzen naar overtollige zoekstappen of doodlopende paden. en de daaruit voortvloeiende zoekstappen. Vervolgens wijzen we erop dat er nog markeringsdefinities zijn die aan het lijstje kunnen worden toegevoegd – zie 2.3.2.

[3] Als p afleidbaar is uit de premissen, dan is er altijd een manier om $\sim p \vee q$ aan te wenden voor het afleiden van p. In dit geval, en in alle gelijkaardige gevallen zal dit echter aanleiding geven tot een nodeloze omweg in het afleidingsproces. De enige uitzondering hierop is verbonden met Ex Falso Quodlibet – zie 2.1.3 en 2.2.3

9	p	8	$\wedge$E	
10	$[q]r$	7,9	Trans	R18
11	$t \supset q$		Prem	
12	$[t]q$	11	$\supset$E	R17
13	$\sim s \vee t$		Prem	
14	$[s]t$	13	$\vee$E	R16
15	s	8	$\wedge$E	
16	t	14,15	Trans	
17	q	12,16	Trans	
18	r	10,17	Trans	
19	$[t]r \wedge t$	4,18	Trans	R20
20	$r \wedge t$	16,19	Trans	

De Doel-regel waarmee het bewijs van start gaat wijst erop dat we op zoek dienen te gaan naar die premissen in Γ waarvan $r \wedge t$ een positief deel is. Dat dit het geval is voor $u \supset (r \wedge t)$ laat toe deze premisse in te voeren in het bewijs. Eenmaal dit is gebeurd, elimineren we het centrale connectief in deze premisse aan de hand van de formule-analyserende regels die in 2.2.3 worden voorgesteld. Veralgemeend komt dit neer op het volgende: indien we op zoek zijn naar een formule A en A is een positief deel van een formule B, dan elimineren we het centrale connectief van B om zo de subformule uit B af te leiden (al dan niet onder een conditie) die A als positief deel bevat. Dit omvat meteen de situaties waarbij men op zoek is naar een formule A en waarbij A ofwel in één stap ofwel in meerdere stappen afleidbaar is uit een formule B die aanwezig is in het bewijs. Is B een premisse die nog niet voorkomt in het bewijs, dan wordt deze eerst geïntroduceerd; is $A = B$, dan dient het centrale connectief natuurlijk niet geëlimineerd te worden. Een lijn bevat geen conditie in het tweede element als en alleen als de formule afgeleid op die lijn (in het tweede element) een gevolg is van de premissen – hetgeen in overeenstemming is met (†). De R-markeringen op verschillende lijnen van het bewijs verwijzen naar de redundantie van de condities in het tweede element van die lijnen – zie 2.3.2. De markering van lijn 3 bevat tevens de propositionele constante u; dit geeft weer dat u de oorzaak is van een doodlopend pad – zie 2.3.3. Na de markering van lijn 3 gaan we op zoek naar een andere premisse waarvan $r \wedge t$ een positief deel is; dit blijkt echter niet het geval. Om in dergelijke situaties het bewijs verder doelgericht te laten verlopen, doen we in de bewijstheorie beroep op conditie-analyserende regels. In het voorbeeld komt dit erop neer dat we op zoek gaan naar r en t afzonderlijk. Dat beide voorkomen in één en dezelfde conditie duidt erop dat beide moeten afgeleid worden opdat de voorwaardelijk afgeleide formule daadwerkelijk kan afgeleid worden in het bewijs. Als we te maken hebben met een disjunctieve formule in een conditie, dan is het voldoende dat één van de disjuncten kan worden afgeleid in het verdere verloop van het bewijs.

Bewijzen volgens het klassiek bewijsformaat bevatten analyserende stappen (of eliminatiestappen), constructieve stappen (of introductiestappen) en soms enkele gemengde stappen. Het is algemeen bekend dat de twee laatstgenoemde soorten stappen gemakkelijk aanleiding geven tot een verlies aan doelgerichtheid in een bewijs, zelfs wanneer we doelgerichtheid als een eerder vaag criterium hanteren. Een van de centrale eigenschappen van het voorgestelde bewijsformaat is dat het toelaat de constructieve stappen te vervangen door conditie-analyserende regels in de bewijstheorie. Deze bieden de zekerheid dat de constructieve stappen enkel worden toegepast in functie van het te bereiken hoofddoel. Zoekt men een formule van de vorm $A \wedge B$ die niet als positief deel voorkomt in de gegeven premissen, dan gaat men vervolgens op zoek naar A en B afzonderlijk – de voorwaardelijk afgeleide formule wordt dan neergeschreven onder de conditie $[A, B]$. Blijkt zowel A als B afleidbaar in het bewijs, dan laat de transitiviteitsregel toe beide elementen uit de conditie te verwijderen waardoor de af te leiden formule op een lege conditie wordt bekomen in het bewijs.

2.1.3 Ex Falso Quodlibet

Dat Ex Falso Quodlibet geldt in **PCL** zorgt voor een complicatie. Veronderstel bijvoorbeeld dat we een bewijs zoeken voor $p, r \wedge {\sim}p \vdash q$. Als de toepassing van de Premisse-regel wordt ingeperkt zoals eerder besproken, dan zal geen enkele premisse worden ingevoegd. Maar zelfs indien we de restrictie op het toepassen van de Premisse-regel weglaten, dan nog zal q niet afleidbaar zijn aangezien er geen enkele premisse is waarvan q een positief deel is. Hierdoor zal geen enkele regel worden toegepast op die laatste. In de context van 'automated deduction' wordt dit euvel weggewerkt door op zoek te gaan naar 'unsatisfiability' – dit komt erop neer dat gestreefd wordt naar de afleiding van een contradictie uit de premissen samen met de negatie van het hoofddoel. Twee klassieke vertegenwoordigers van deze 'refutation'-aanpak in het veld van 'automated deduction' zijn 'resolutie' en de 'Davis-Putnam procedure' – zie[27],[31],[32]. Deze zijn echter gericht op mechanisatie en machinale implementatie. In dit opzicht vormt het dan ook geen probleem dat $\Gamma \vdash G$ wordt omgezet naar de vraag of $\Gamma^* \cup \{({\sim}G)^*\}$ consistent is, waarbij Γ^* en $({\sim}G)^*$ staan voor een vooraf doorgevoerde omzetting van Γ en ${\sim}G$ in 'normaalvorm' – in dit geval 'conjunctieve normaalvorm'.

Er zijn verschillende redenen waarom we afwijken van deze 'refutation' procedure. Vooreerst kan ze bij verschillende logica's niet worden toegepast, waaronder relevante en andere (strikt) paraconsistente logica's.[4] Indien we ons bewijsformaat willen toepassen op alternatieve logica's, waaronder de eerder vermelde, dan blijkt het niet aangewezen te steunen op een 'refutation'-procedure. Kan deze laatste dan niet gebruikt worden aan het eind van de voorgestelde

[4]Een logica **L** is strikt paraconsistent als en alleen als $Cn_{\mathbf{L}}(\Gamma)$ niet triviaal is voor eender welke eindige Γ – zie [2].

doelgerichte procedure om alsnog Ex Falso Quodlibet toe te laten indien Γ inconsistent is? Het kan zeker, maar aangezien algemeen wordt aangenomen dat de 'refutation'-procedure niet echt een schoolvoorbeeld is voor de representatie van 'natuurlijk redeneren', blijkt dit niet de meest aangewezen oplossing voor de beschrijving van zoekprocessen in de context van een natuurlijke doelgerichte bewijsprocedure.

Om ook in dit geval de bewijzen doelgericht te laten verlopen, gaan we achtereenvolgens op zoek naar de negatie van de verschillende premissen tot er een kan worden afgeleid. Met andere woorden, als – in het geval van een eindig aantal premissen – het hoofddoel G niet kan worden afgeleid via de normale weg, dan weet men dat G wel afleidbaar is indien de negatie van een premisse kan worden afgeleid en kan men dusdanig zoeken naar dit nieuwe doel.

2.2 Van Bewijsformaat naar Regelsysteem

In dit deel formuleren we een verzameling regels die toelaten bewijzen te construeren zoals voorgesteld in 2.1. Het regelsysteem dat eruit resulteert noemen we **PCLc**, waarbij de **c** verwijst naar het conditionele element dat als meerwaarde wordt geïntroduceerd ten opzichte van het klassieke bewijsformaat. Ik baseer mij hiervoor op het regelsysteem **PCI1** zoals voorgesteld in [5] waarvoor tevens een heuristiek is uitgewerkt in [4]. In eerste instantie richten we onze aandacht op de vraag of **PCLc** correct is ten opzichte van (†). Hoewel het nieuwe bewijsformaat en het erop gebaseerde regelsysteem toelaten de zoekprocessen bij het maken van een bewijs op te nemen in het bewijs zelf, en daardoor heuristisch inzicht incorporeren in de bewijzen, laten we verdere heuristische verfijning achterwege in dit deel. Vooraleer de regels te beschrijven stellen we een tabel op waarin formules van een bepaalde vorm gelinkt worden met twee al dan niet verschillende analyserende delen. Dit laat toe de regels van het regelsysteem op een transparante en bondige manier weer te geven. Daar dit ook geldt voor de definiëring van de 'positief deel'-relatie, wordt deze pas in dit deel behandeld, voorafgaand aan de regels. Het taalschema voor de beschrijving van **PCLc** is identiek aan dat voor **PCI1** – i.e. **PC** – uit [5] waarbij $\mathcal{S} = \{p, q, r, s, t, u, p_1, \ldots\}$ de verzameling schematische letters voor zinnen is.

2.2.1 Het linken van formules met andere formules

Als voorbereiding op de definitie voor de 'positief deel'-relatie en het formuleren van de formule- en conditie-analyserende regels maken we eerst een onderscheid tussen $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{b}$ formules en linken we ze met twee (niet noodzakelijk verschillende) formules. We steunen hierbij op de $\alpha - \beta$-classificatie van 'unsigned formulas' zoals voorgesteld in [40].

Hierbij staat $*A$ voor het 'complement' van A, d.w.z. B als A de vorm $\sim B$ heeft en $\sim A$ in het andere geval.

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$		$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2$
$A \wedge B$	A	B		$\sim(A \wedge B)$	$*A$	$*B$
$A \equiv B$	$A \supset B$	$B \supset A$		$\sim(A \equiv B)$	$\sim(A \supset B)$	$\sim(B \supset A)$
$\sim(A \vee B)$	$*A$	$*B$		$A \vee B$	A	B
$\sim(A \supset B)$	A	$*B$		$A \supset B$	$*A$	B
$\sim\sim A$	A	A				

Tabel 2.1: $\mathfrak{a}$- en $\mathfrak{b}$-formules in **PCLc**

2.2.2 Een recursieve definitie voor de 'Positief Deel'-relatie

Door ons te baseren op de vorige tabel voor het definiëren van de 'positief deel'-relatie, wijken we af van de definitie die werd voorgesteld in [21]. Hier werd tevens de notie 'negatief deel' ingevoerd, maar deze bleek voor complicaties te zorgen bij uitbreiding van de bewijstheorie naar het predikatief fragment van de klassieke logica.[5] We gebruiken de afkorting $\mathrm{pd}(A, B)$ om weer te geven dat A een positief deel is van B. De A uit $\mathrm{pd}(A, B)$ zal een element zijn uit de conditie van een lijn in het bewijs. De B is ofwel een premisse ofwel een afgeleide formule in het tweede element van een lijn in het bewijs. De recursieve definitie voor de 'positief deel'-relatie wordt aan de hand van het onderscheid tussen $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{b}$ formules door de volgende drie clausules bepaald:

1. $\mathrm{pd}(A, A)$.
2. $\mathrm{pd}(A, \mathfrak{a})$ als $\mathrm{pd}(A, \mathfrak{a}_1)$ of $\mathrm{pd}(A, \mathfrak{a}_2)$.
3. $\mathrm{pd}(A, \mathfrak{b})$ als $\mathrm{pd}(A, \mathfrak{b}_1)$ of $\mathrm{pd}(A, \mathfrak{b}_2)$.

2.2.3 Het Regelsysteem PCLc

Structurele Regels

We gaan van start met het formuleren van twee structurele regels die toelaten het hoofddoel en premissen te introduceren in het bewijs. Daar we in dit deel de bewijsheuristiek achterwege laten, mag de Doel-regel op om het even welk stadium van het bewijs worden toegepast voor eender welke A.

Doel — Een hoofddoel G mag geïntroduceerd worden op een lijn met $[G]G$ als tweede element.

[5] Voor de aanpak met negatief deel: zie tevens [39]. Verder merk ik op dat deze voor complicaties zorgt in het predikatief fragment met betrekking tot het hier voorgestelde bewijsformaat. In de literatuur rond 'automated theorem proving' wordt de aanpak met positief en negatief deel aangeduid met de term 'polarity'; zie bijvoorbeeld [35] waar deze wel wordt aangewend voor de eerste-orde predikatieve calculus.

Prem Eender welke premisse A mag niet-conditioneel geïntroduceerd worden.[6]

Formule-Analyserende Regels

Vervolgens hebben we nood aan regels die toelaten premissen of eruit afgeleide formules te analyseren. De linkse regel vat eigenlijk twee regels samen: zowel $[\Delta]\mathfrak{a}_1$ en $[\Delta]\mathfrak{a}_2$ kunnen worden afgeleid uit $[\Delta]\mathfrak{a}$; hetzelfde geldt voor de rechtse regel en voor de linkse conditie-analyserende regel die hierna wordt voorgesteld.

$$\frac{[\Delta]\mathfrak{a}}{[\Delta]\mathfrak{a}_1 \quad [\Delta]\mathfrak{a}_2} \qquad \frac{[\Delta]\mathfrak{b}}{[\Delta \cup \{*\mathfrak{b}_2\}]\mathfrak{b}_1 \quad [\Delta \cup \{*\mathfrak{b}_1\}]\mathfrak{b}_2}$$

De benoeming van de regels gaat als volgt: eerst plaatsen we het centrale connectief dat wordt geëlimineerd, gevolgd door E. Hebben we te maken met een formule van de vorm $\sim(A \otimes B)$ (met $\otimes \in \{\wedge, \vee, \supset, \equiv\}$) in de $\mathfrak{a}$ of $\mathfrak{b}$ kolom, dan wordt het centrale connectief in $A \otimes B$ voorafgegaan door $\sim$. De regel voor de eliminatie van een dubbele negatie wordt benoemd als $\sim\sim E$. Voor de conditie-analyserende regels die hierna volgen, wordt eenzelfde benoeming gehanteerd als deze voor de formule-analyserende regels, maar dan voorafgegaan door een C.

Conditie-Analyserende Regels

De regels waarmee we het centrale connectief uit elementen van een conditie elimineren worden als volgt samengevat:

$$\frac{[\Delta \cup \{\mathfrak{a}\}]A}{[\Delta \cup \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}]A} \qquad \frac{[\Delta \cup \{\mathfrak{b}\}]A}{[\Delta \cup \{\mathfrak{b}_1\}]A \quad [\Delta \cup \{\mathfrak{b}_2\}]A}$$

Aanvullende regels

Naast de analyserende regels hebben we ook nood aan twee gemengde regels. De eerste werd reeds toegepast in het voorafgaande voorbeeld.

$$\text{Trans} \qquad \frac{\begin{array}{c}[\Delta \cup \{B\}]A \\ [\Delta']B\end{array}}{[\Delta \cup \Delta']A}$$

Het is duidelijk dat de Trans-regel al vlug aanleiding kan geven tot een ongecontroleerde toename van het aantal regels in een bewijs. Toch zal in de bespreking van de heuristiek duidelijk worden dat de toepassing ervan op een zinnige wijze kan worden ingeperkt – zie 2.3.

[6]Het niet-conditioneel afleiden van een formule A komt op hetzelfde neer als het afleiden van $[\emptyset]A$ in een bewijs. We schrijven dan ook kortweg A in het tweede element van een lijn indien A wordt afgeleid onder de lege conditie.

In sommige gevallen zal de toepassing van de analyserende regels en de Trans-regel echter onvoldoende zijn om een hoofddoel G op een lege conditie af te leiden. Dit is onder meer het geval voor bewijzen waarbij in het klassieke bewijsformaat beroep wordt gedaan op regels als 'Dilemma' (DIL),'Reductio ad Absurdum' (RAA) en 'Transitiviteit' (TRA). Nemen we het tweede als voorbeeld, dan bekomen we het volgende resultaat aan de hand van de reeds voorgestelde regels:

→ '**RAA**': $p \supset q, p \supset {\sim}q \vdash {\sim}p$

1	$[{\sim}p]{\sim}p$		Doel	${\sim}p\vert$ R8'
2	$p \supset q$		Prem	
3	$[{\sim}q]{\sim}p$	2	$\supset$E	${\sim}q\vert$ R8'
4	$p \supset {\sim}q$		Prem	
5	$[p]{\sim}q$	4	$\supset$E	$p\vert$
6	$[q]{\sim}p$	4	$\supset$E	$q\vert$ R8'
7	$[p]q$	2	$\supset$E	$p\vert$

Hierna kan enkel nog de Trans-regel worden toegepast zodat de volgende lijn wordt toegevoegd aan het bewijs:

8	$[p]{\sim}p$	3,5	Trans

Ook deze stap brengt echter geen zoden aan de dijk. Noch q, noch ${\sim}q$ is afzonderlijk afleidbaar uit de premissen; dat Uitgesloten Derde geldt in **PCL** kan echter soelaas bieden – ook voor de andere vermelde probleemgevallen. Hierdoor kan het bewijs na lijn 7 worden afgewerkt door toevoeging van de volgende lijn:

8'	${\sim}p$	3,6	UD

De Uitgesloten Derde regel ziet er als volgt uit:

$$\text{UD} \qquad \frac{\begin{array}{c}[\Delta \cup \{B\}]A \\ [\Delta' \cup \{{\sim}B\}]A\end{array}}{[\Delta \cup \Delta']A}$$

In bepaalde gevallen – waaronder de situaties waarbij we in **PCI1** gebruik maken van de regels **RAA** en **DIL** – kan ook de volgende afgeleide regel worden toegepast:

$$\text{UD0} \qquad \frac{[\Delta \cup \{*A\}]A}{[\Delta]A}$$

Een derde type bewijs vloeit voor uit het eerder besproken geval waarin we te maken hebben met Ex Falso Quodlibet. Ik geef een eerder ongewone versie die steunt op het feit dat de doelgerichte bewijzen mikken op de afleiding van een hoofddoel G uit Γ:

EFQ Als $A \in \Gamma$, dan mag het hoofddoel G geïntroduceerd worden op een lijn met $[\sim A]G$ als tweede element.

Deze regel steunt op het volgende: als we in staat zijn de negatie van een premisse A af te leiden uit Γ, dan weten we dat de laatste inconsistent is waardoor G er volgens **PCL** uit afleidbaar is. In dit opzicht is deze regel een variant van Ex Falso Quodlibet.

Het bewijzen van stellingen

Het bewijzen van stellingen is behoorlijk eenvoudig aan de hand van dit regelsysteem. Nemen we bijvoorbeeld de stelling $\vdash_{\mathbf{PCL}} ((p \supset q) \supset p) \supset p$, dan kan deze op de volgende manier uiterst kort worden bewezen:

1	$[((p \supset q) \supset p) \supset p]((p \supset q) \supset p) \supset p$		Doel	R6
2	$[\sim((p \supset q) \supset p)]((p \supset q) \supset p) \supset p$	1	C⊃E	R6
3	$[p]((p \supset q) \supset p) \supset p$	1	C⊃E	R6
4	$[p \supset q, \sim p]((p \supset q) \supset p) \supset p$	2	C$\sim$ ⊃E	R6
5	$[\sim p]((p \supset q) \supset p) \supset p$	4	C⊃E	R6
6	$((p \supset q) \supset p) \supset p$	3,5	UD	

Merk echter op dat **PCL**-stellingen niet bewijsbaar zouden zijn indien de Doel-regel zou verwijderd worden uit **PCLc**. Hetzelfde geldt bijvoorbeeld voor $p \vdash_{\mathbf{PCLc}} p \vee q$. Dit is simpelweg een gevolg van het feit dat het regelsysteem niet toelaat een complexe formule af te leiden aan de hand van één of meerdere minder complexe formules, zowel op het gebied van de al dan niet conditioneel afgeleide formules als op dat van de formules in de condities. Vanaf het moment dat het hoofddoel geen subformule is van enige premisse, hebben we nood aan de Doel-regel om de conditie $[G]$ in te voeren die dan verder kan geanalyseerd worden. Met andere woorden, ook al werd de Doel-regel in eerste instantie ingevoerd met het oog op de implementatie van zoekprocessen in de bewijzen zelf, het is in geen enkel geval een redundante regel in **PCLc**.

2.3 Bewijsheuristieken voor PCLc

2.3.1 Algemeen

De doelstelling van de bewijsheuristiek is als leidraad te dienen bij het zoeken van een bewijs van een hoofddoel uit een gegeven verzameling premissen, en meer bepaald heeft ze als taak dit zoekproces op een efficiënte manier te laten verlopen. Onder een efficiënt **PCLc**-bewijs verstaan we een bewijs waarin enkel zinnige zoekstappen worden ondernomen. Bekijken we opnieuw het voorbeeld uit 2.1.2, dan is het duidelijk een inefficiënte stap om bijvoorbeeld $s \vee u$ af te leiden in het bewijs daar geen enkel zinnig pad in het zoekproces hierop teruggaat. De efficiëntie van een bewijs mag echter niet verward worden met de elegantie ervan. Nemen we hetzelfde voorbeeld, dan bekomen we natuurlijk een eleganter bewijs indien lijnen 2 en 3 worden weggelaten – deze behoren namelijk tot een doodlopend pad in het zoekproces. De aanwezigheid van deze lijnen maakt het bewijs echter niet inefficiënt; het is een zinvolle stap om op zoek te gaan naar u in functie van het hoofddoel $r \wedge t$. Stel nu dat we Γ uitbreiden zodat u toch afleidbaar is uit de premissen en stel tegelijk dat het zoekproces voor het afleiden van u veel complexer is dan dat waarbij we op zoek gaan naar r en t afzonderlijk. Dan nog zal dit een efficiënt bewijs zijn omdat alle stappen in het zoekproces relevant zijn voor de afleiding van het hoofddoel. Indien men echter enkel interesse heeft in het resultaat en niet in het achterliggende zoekproces, dan grijpt men beter terug naar het klassieke bewijsformaat en kan het nieuwe bewijsformaat en het erbij horende regelsysteem enkel dienen als hulpmiddel bij de zoektocht naar het meest elegante bewijs.

2.3.2 De Markeringsdefinities

Vooraleer van start te gaan met het beschrijven van de heuristische regels introduceer ik eerst de markeringsdefinities. In eerste instantie beperk ik mij tot de markeringsdefinties die werden beschreven in [21]. Lijnen worden gemarkeerd als en alleen als de conditie die erin voorkomt aanleiding geeft tot nodeloos complexe zoekpaden. De markering van 'doodlopende' paden wordt voorgesteld in de beschrijving van de 'diepte eerst'-heuristiek – zie 2.3.3.

De eerste en meest evidente reden is die waarbij een specifiek doel A afleidbaar is onder de condities Δ en Δ' met $\Delta' \subset \Delta$. De lijn met Δ als conditie wordt R-gemarkeerd aangezien Δ één of meerdere elementen bevat die leiden tot redundante zoekpaden ten opzichte van Δ'. Eerst stel ik nog even het volgende expliciet: een bewijs bevindt zich op stadium j als en alleen als j het nummer is van de laatste lijn die werd toegevoegd aan het bewijs.

Definitie 1 *Een lijn i waarop $[\Delta]A$ is afgeleid, is R-gemarkeerd op een stadium van het bewijs als op dat stadium $[\Delta']A$ is afgeleid en $\Delta' \subset \Delta$.*

De R-markering gebeurt door toevoeging van Rj – waarbij j de lijn is waarop $[\Delta']A$ is afgeleid – in het vijfde element van de gemarkeerde lijn i.

De tweede reden heeft betrekking op de geldigheid van Ex Falso Quodlibet in **PCL**. Een conditie Δ is *zichtbaar inconsistent* alss $A, {\sim}A \in \Delta$ voor een willekeurige A. Lijnen die een *zichtbaar inconsistente* conditie bevatten worden

I-gemarkeerd. In principe zijn dergelijke lijnen onschuldig en geldig ten opzichte van (†). Toch wensen we het zoekproces uit te voeren in de vooronderstelling dat Γ consistent is waardoor Ex Falso Quodlibet als randverschijnsel wordt beschouwd. Indien Γ alsnog inconsistent is en het hoofddoel G niet is afgeleid aan de hand van het regelsysteem met uitzondering van EFQ, dan kunnen we in laatste instantie beroep doen op de regel EFQ om G af te leiden.

Definitie 2 *Een lijn i waarop* $[\Delta]A$ *is afgeleid, is I-gemarkeerd als* Δ *zichtbaar inconsistent is.*

Een derde en laatste reden om een lijn te markeren is wanneer ze $[\Delta]A$ als tweede element bevat en $A \in \Delta$. In dit geval wordt de lijn O-gemarkeerd omdat de conditie overbodig is ten opzichte van de eerder gestelde conditie waarvan A een element is.

Definitie 3 *Een lijn i waarop* $[\Delta]A$ *is afgeleid, is O-gemarkeerd als* $A \in \Delta$*, tenzij lijn i werd geïntroduceerd door middel van de Doel-regel.*

De I- en O-markering worden weergegeven door toevoeging van respectievelijk I en O in het vijfde element van de gemarkeerde lijn. Een verwijzing naar het stadium is overbodig daar de markering enkel betrekking heeft op het tweede element van de gemarkeerde lijn.

2.3.3 De Bewijsheuristieken

Met een **PCLc**-bewijs voor $\Gamma \vdash G$ verwijs ik vanaf nu naar een bewijs dat wordt bekomen door het regelsysteem **PCLc**, waarbij de toepassing van de regels onderhevig is aan de instructies van een heuristiek. Een dergelijk bewijs *start* met de introductie van $[G]G$ aan de hand van de Doel-regel en *eindigt* wanneer G is afgeleid op een lege conditie. Een bewijs *stopt* wanneer het eindigt of wanneer geen verdere stappen kunnen worden ondernomen in functie van de heuristiek. Er is in principe geen enkel probleem verbonden met het meermaals toepassen van de Doel-regel binnen één en hetzelfde bewijs. In deze verhandeling richt ik mij echter enkel op het geval waarbij de Doel regel eenmalig wordt toegepast voor het starten van een bewijs.

In eerste instantie beschrijf ik de heuristiek die werd ontwikkeld in [21] en die mag beschouwd worden als de basisheuristiek voor het regelsysteem **PCLc**, niet alleen omdat het de eerste heuristiek is die voor dit regelsysteem werd ontwikkeld maar ook en vooral omdat hij niet volledig deterministisch is. Dit laatste kan op verschillende manieren worden verholpen, maar het onderzoek naar elk van deze varianten en een vergelijkende studie betreffende hun computationele efficiëntie ligt buiten de eigenlijke doelstelling van deze verhandeling. Desalniettemin zal ik in tweede instantie overgaan tot het beschrijven van enkele heuristieken die wel deterministisch verlopen en die slechts een minimale aanpassing vereisen ten aanzien van de basisheuristiek. De meerwaarde die ze opleveren bestaat vooral in een striktere uitwerking van de verschillende zoekpaden die kunnen ontstaan in een bewijs.

De basisheurisiek

De basisheuristiek wordt geleid door de verzameling Σ_j, waarbij $A \in \Sigma_j$ als en alleen als A lid is van een conditie van een niet-gemarkeerde lijn op stadium j. Indien enkel wordt verwezen naar Σ, dan wordt hiermee de toestand van Σ bedoeld op het huidige stadium van het bewijs. Op de toepassing van de instructies om een bewijs voor $\Gamma \vdash G$ neer te schrijven worden drie restricties gelegd, die hun formulering minder complex maakt:

R1 Formule-analyserende regels worden niet toegepast op formules geïntroduceerd door de Doel-regel.
R2 Geen enkele regel wordt aangewend om de formule op een gemarkeerde of niet-gemarkeerde lijn te herhalen.
R3 Geen enkele regel wordt toegepast op een gemarkeerde lijn.

Het nut van de drie restricties is evident. De toepassing van formule-analyserende regels op G heeft enkel tot gevolg dat subformules van G worden afgeleid op de conditie $[G]$ waardoor het eigenlijke zoekproces wordt uitgesteld. De tweede restrictie zorgt ervoor dat circulaire zoekpaden effectief worden afgesloten.[7] Bovendien wordt vermeden dat premissen herhaaldelijk worden geïntroduceerd in een bewijs. Voor de derde restrictie verwijs ik naar 2.3.2.

De instructies zijn weergegeven in volgorde van toepassing. Indien een instructie kan worden uitgevoerd, wordt een lijn toegevoegd aan het bewijs en keren we terug naar I1. Indien dit niet het geval is, gaan we door naar de volgende instructie.

I0 Introduceer $[G]G$ door middel van de Doel-regel.
I1 Leid G niet-conditioneel af met om het even welke regel.
I2 Pas UD of UD0 toe indien dit aanleiding geeft tot het R-markeren van een lijn.
I3 Pas Trans toe indien dit aanleiding geeft tot het R-markeren van een lijn.
I4 Pas een formule-analyserende regel toe om $[\Delta]A$ te bekomen op een lijn i, op voorwaarde dat $B \in \Sigma_{i-1}$ een positief deel is van A.
I5 Pas Prem toe om A te bekomen op een lijn i, op voorwaarde dat $B \in \Sigma_{i-1}$ een positief deel is van A.
I6 Pas een conditie-analyserende regel toe.
I7 Pas UD toe om $[\Delta]G$ te bekomen, op voorwaarde dat Δ niet zichtbaar inconsistent is.
I8 Pas Trans toe om $[\Delta]G$ te bekomen (voor een Δ), op voorwaarde dat Δ niet zichtbaar inconsistent is.

[7] Denk hierbij aan het eenvoudige voorbeeld $p \supset p \vdash p$. Ook al wordt de lijn waarop $[p]p$ is afgeleid O-gemarkeerd, dan nog kan het bewijs eindeloos worden uitgebreid met het steeds opnieuw introduceren van de premisse en het afleiden van $[p]p$.

I9 Pas EFQ toe.

Instructie I1 komt neer op het volgende: doorloop de verschillende regels en ga na of één ervan resulteert in het afleiden van G; wat ervoor zorgt dat het doel niet-conditioneel wordt afgeleid wanneer de mogelijkheid hiertoe zich expliciet voordoet. De regel Trans kent twee toepassingen die een verschillende functie vervullen in de heuristiek:

(i) In I3 vervult Trans de taak om een formule A te elimineren uit Σ.
(ii) In I8 zorgt Trans voor het afleiden van G onder een nieuwe conditie Δ.

Dit onderscheid heeft voornamelijk te maken met de tweede functie van Trans; deze kan namelijk aanleiding geven tot het ongecontroleerd toevoegen van meerdere onnodige lijnen in de bewijzen. Hetzelfde geldt voor de regel UD. Ook hier maken we een onderscheid tussen de toepassing die leidt tot R-markering en de toepassing die ervoor zorgt dat G kan worden afgeleid op een nieuwe conditie. In het eerste geval is $\Delta' \subseteq \Delta$ of $\Delta \subseteq \Delta'$; dit houdt tevens het geval in waarbij $\Delta' = \Delta$ en het geval waarbij Δ of Δ' of beide leeg zijn. Instructie I4 verzekert dat elke nieuwe stap in het bewijs zinvol is binnen een bepaald pad van het zoekproces nadat het doel is ingevoerd door I0. Door instructie I5 kunnen enkel die premissen worden opgenomen in het bewijs waarvan een $A \in \Sigma$ een positief deel is. Doordat instructies I4 en I5 de toepassing van conditie-analyserende regels voorafgaan, bekomen we een uitwerking van de verschillende zoekpaden in de breedte. Nadat een premisse is geïntroduceerd waarvan het hoofddoel of een subdoel een positief deel is, wordt deze geanalyseerd tot het punt waarop het hoofddoel of dit subdoel al dan niet conditioneel is afgeleid. Daarna kan gezocht worden naar het nieuw bekomen subdoel of één van de voorafgaande doelen. Er wordt pas overgegaan tot de toepassing van conditie-analyserende regels indien alle alternatieve zoekpaden voor de aldus bekomen doelen zijn uitgewerkt. Deze ontplooiing van het zoekproces in de breedte heeft als nadeel dat we geen duidelijk overzicht bewaren betreffende elk zoekpad afzonderlijk.

Wanneer $\Gamma \vdash G$ en Γ zowel consistent als eindig is, dan komt men nooit toe aan instructie I9. Stopt het bewijs na toepassing van I0-I8, dan gaan we door middel van EFQ op een doelgerichte wijze – daar we op zoek gaan naar specifieke inconsistenties – na of Γ inconsistent is. Als Γ oneindig is, is het echter mogelijk dat het bewijs nooit stopt door toepassing van instructies I0-I8 waardoor we niet kunnen overgaan tot instructie I9. Zijn we op zoek naar een **PCLc**-bewijs voor $\Gamma \vdash {\sim}q_0$ met $\Gamma = \{p \wedge {\sim}p\} \cup \{q_i \supset q_{i+1} \mid i \in \{0, 1, \ldots\}\}$, dan zal dit bewijs nooit stoppen; daarenboven zal EFQ nooit worden toegepast waardoor ${\sim}q_0$ niet kan worden afgeleid. Om dergelijke gevallen in rekening te brengen, wordt een derde restrictie ingevoerd voor het geval we te maken hebben met oneindige Γ. Laat $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ hierbij een limietreeks zijn van Γ alss $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \ldots$ en $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots$.

R4 Als Γ oneindig is, dan wordt een bewijs voor $\Gamma \vdash G$ als volgt gedefinieerd in termen van een limietreeks $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ uit Γ: eerst worden de instructies toegepast op Γ_1; als de procedure stopt wordt het bewijs vervolgd door toepassing van de instructies op Γ_2; etc.

De 'diepte eerst'-heuristiek

Ik wees er reeds op dat de basisheuristiek aanleiding kan geven tot een eerder onoverzichtelijke behandeling van de verschillende zoekpaden doordat deze in de breedte worden uitgewerkt. Dit vloeit in hoofdzaak voort uit het lineaire karakter van de doelgerichte bewijzen. Om doelgerichte bewijzen in de breedte te laten ontwikkelen blijkt een boomstructuur of een diagrammatische aanpak – zie [15] – meer geschikt. Toch kan ik hierbij opmerken dat de lineaire doelgerichte bewijzen – in tegenstelling tot de diagrammatische bewijzen – geen herhaling van fragmenten uit zoekpaden vereisen. Een alternatieve heuristiek die meer in overeenstemming is met lineaire doelgerichte bewijzen en die een gerichte uitwerking van de verschillende zoekpaden mogelijk maakt steunt op het 'diepte eerst'-principe – voor het eerst ingevoerd in [16]. Dit komt eenvoudigweg neer op het volgende: wanneer een nieuwe conditie wordt geïntroduceerd in een bewijs, dan is het eerste lid ervan het nieuwe doel dat ons zoekproces leidt. De voorbeelden die reeds werden uitgewerkt in afdelingen 2.1.2 en 2.2.3 steunen op een dergelijke aanpak.

Niettegenstaande het feit dat ik de condities in algemene termen en tevens in de basisheuristiek als verzamelingen benader, is het mogelijk deze als geordende lijsten formules op te vatten in de uitvoering van een heuristiek. Hiervoor dienen we enkel het volgende af te spreken. Als we een formule-analyserende regel toepassen op een niet-conditionele $\mathfrak{b}$-formule, dan is ofwel $\mathfrak{b}_1$ ofwel $\mathfrak{b}_2$ natuurlijk het eerste lid van de conditie. Passen we een formule-analyserende regel toe op een conditionele $\mathfrak{b}$-formule waarbij de conditie reeds een i-aantal leden bevat met $1 \leq i$, dan wordt $\mathfrak{b}_1$ of $\mathfrak{b}_2$ lid $i+1$ van de conditie. Bij de toepassing van een conditie-analyserende regel op een formule A die voorkomt als lid i in de conditie, geldt het volgende voor de ordening van de condities:

(i) Indien A een $\mathfrak{a}$-formule is, dan wordt $\mathfrak{a}_1$ lid i en $\mathfrak{a}_2$ lid $i+1$ in de conditie.
(ii) Indien A een $\mathfrak{b}$-formule is, dan wordt $\mathfrak{b}_1$ lid i in de conditie bij een eerste toepassing van de conditie-analyserende regel, respectievelijk $\mathfrak{b}_2$ bij een tweede toepassing van de conditie-analyserende regel.

De 'diepte eerst'-heuristiek die ik hier voorstel wijkt in lichte mate af van de versie die we terugvinden in [16] – waarop het programma [14] is gebaseerd. Het 'diepte eerst' principe kan op een eenvoudige wijze worden ingebouwd in de basisheuristiek door niet langer te steunen op de verzameling Σ_j als leidraad voor instructies I4 en I5. Als we stellen dat $B \prec \Delta$ en $\Delta_{j \leq i}$ respectievelijk staan voor 'B is het eerste lid van conditie Δ' en 'Δ is de conditie in het tweede element van lijn j en j is de laatste niet-gemarkeerde lijn die een conditie bevat op stadium i, met $j \leq i$', dan bekomen we de 'diepte eerst'-heuristiek door in de basisheuristiek instructies I4-I6 als volgt te wijzigen:

I4' Pas een formule-analyserende regel toe om $[\Delta]A$ te bekomen op een lijn i, op voorwaarde dat $B \prec \Delta_{j \leq i-1}$ een positief deel is van A.

I5' Pas Prem toe om A te bekomen op een lijn i, op voorwaarde dat $B \prec \Delta_{j \leq i-1}$ een positief deel is van A.

I6' Pas een conditie-analyserende regel toe op het eerste lid van de laatst voorkomende conditie.

In overeenstemming met het voorstel uit [16] kunnen we de heuristiek opdelen in fases. De eerste fase beperkt zich tot de toepassing van instructies I0-I3 en I4'-I6'. Beide voorstellen verschillen slechts op één punt, namelijk het behoud van instructie I2 in de hier voorgestelde heuristiek. Dit zorgt ervoor dat het zoekproces naar een bepaalde formule A niet nodeloos wordt doorgevoerd indien $[B]A$ en $[\sim B]A$ reeds zijn afgeleid. Stopt het bewijs na uitvoering van fase 1, dan gaan we over tot de toepassing van instructies I7 en I8. De huidige stand van het onderzoek laat niet toe uit te maken of I6' voldoende is met het oog op de toepassing van I7 en I8. Ik breid de heuristiek dan ook uit door instructie I6 uit de basisheuristiek opnieuw in te voeren, maar dan als instructie I9. De toepassing van EFQ wordt dan natuurlijk I10. Eenmaal een stap werd gezet in fase 2, hervatten we het zoekproces volgens fase 1, ... Leidt de dynamiek tussen deze twee fases toch tot het stopzetten van het bewijs, dan gaan we in derde fase over tot de toepassing van EFQ.

Om de 'diepte eerst'-heuristiek volledig tot zijn recht te laten komen, hebben we nood aan een extra markeringsdefinitie, i.e. de markering van doodlopende paden. Veronderstel dat we op stadium i van het bewijs $[p \vee q]r$ hebben afgeleid en dat instructies I1-I5' niet kunnen worden toegepast, dan wordt $[p]r$ het tweede element van lijn $i+1$. Op stadium $i+1$ is p het nieuwe doel dat dienst doet als leidraad voor de heuristiek. Als instructies I1-I5' niet kunnen worden toegepast, dan gaat de heuristiek over naar fase 2. Een dergelijk scenario blijkt echter niet bevredigend daar de instructies in fase 2 minder gericht zijn op het systematisch uitwerken van de verschillende zoekpaden. Indien blijkt dat het pad waarop we r trachten af te leiden door p af te leiden dood loopt, dan kunnen we nog steeds "op onze stappen terugkeren" om vanuit $[p \vee q]r$ over te gaan op $[q]r$. Als we de lijn waarop $[p]r$ is afgeleid markeren omdat p aan de basis ligt van een doodlopend pad, dan zal de heuristiek opnieuw inwerken op de lijn waarop $[p \vee q]r$ is afgeleid. Een formule A ligt aan de basis van een doodlopend pad als A het doel is op een stadium van het bewijs en er geen stappen kunnen worden ondernomen in functie van instructie I6' bij de uitvoering van de heuristiek.

Definitie 4 *Een lijn i waarop $[\Delta]B$ is afgeleid met $A \prec \Delta$, is D-gemarkeerd indien A aan de basis ligt van een doodlopend pad.*

De D-markering van een lijn bestaat uit het toevoegen van $A|$ in het vijfde element van lijn i indien A aan de basis ligt van een doodlopend pad. Het statuut van deze markering verschilt enigszins van de R-, I- en O-markering.

De laatste geven namelijk weer dat we de heuristiek niet wensen toe te passen op de doelen van een bepaalde conditie, ook al is dit in feite mogelijk. De D-markering wijst er echter op dat fase 1 van de heuristiek niet kan worden toegepast op het doel op een specifiek stadium van het bewijs. Binnen de context van de 'diepte eerst' heuristiek vervult ze dan ook de taak om in een dergelijk geval een nieuw doel aan te duiden op dit stadium van het bewijs en aldus een nieuw pad te openen.[8] Hierdoor valt de D-markering weliswaar niet onder de noemer van restrictie R3. Dit blijkt bijvoorbeeld uit het doelgerichte bewijs voor $p \supset q, p \supset {\sim}q \vdash {\sim}p$ zoals voorgesteld in 2.2.3. Hier hebben we namelijk te maken met een geval waarbij zowel een formule B als een formule ${\sim}B$ aan de basis liggen van een doodlopend pad in het zoekproces naar een formule A. De D-markeringen die hiermee gepaard gaan vormen echter geen beperking op de toepassing van de UD-regel. Restrictie R3 uit de basisheuristiek moet dan ook als volgt worden aangepast en aangevuld:

R3	Geen enkele regel wordt toegepast op een R-, O- of I-gemarkeerde lijn.
R3'	De toepassing van de regels zoals voorgesteld in instructies I2 en I7-I9 is geldig met betrekking tot D-gemarkeerde lijnen.

Binnen het kader van het voorgaande voorbeeld kan ik tevens het verschil toelichten tussen beide versies van de 'diepte eerst'-heuristiek. In 2.2.3 werd het voorbeeld uitgewerkt aan de hand van de heuristiek zoals beschreven in [16]. Voeren we hetzelfde bewijs uit aan de hand van de hier voorgestelde heuristiek, dan eindigt het bewijs met de volgende lijnen:

6	$[q]{\sim}p$	4	$\supset$E	R7
7	${\sim}p$	3,6	UD	

Lijn 6 dient in dit geval niet D-gemarkeerd te worden aangezien het er verder niet meer toe doet of q al dan niet aan de basis ligt van een doodlopend pad.

Voor alle duidelijkheid vermeld ik nog het volgende: de heuristiek werkt steeds in op het actuele doel. Stel dat $[\Delta]B$ is afgeleid op lijn i en $A \prec \Delta$, dan is A het doel op stadium i van het bewijs. Blijkt A echter aan de basis te liggen van een doodlopend pad, dan wordt lijn i gemarkeerd en is A niet langer het doel op stadium i van het bewijs. Eenmaal lijn i is gemarkeerd wordt B het nieuwe doel van ons zoekproces op stadium i van het bewijs indien $B \prec \Delta_{j \leq i-1}$. De heuristiek start dan opnieuw bij instructie I1.

[8] Dat de D-markering ook kan worden geïmplementeerd in de basisheuristiek staat buiten kijf, maar het is pas in de 'diepte eerst'-heuristiek dat haar waarde ten volle kan worden ingeschat.

Een heuristiek in functie van zichtbare zoekpaden

Een tweede en laatste variant van de basisheuristiek die ik wil voorstellen sluit nauw aan bij de 'diepte eerst'-heuristiek, maar biedt het voordeel dat de verschillende zoekpaden duidelijk na te sporen zijn. Dit is een belangrijk gegeven als we rekening houden met het lineaire karakter van de hier voorgestelde doelgerichte bewijzen. Het biedt tevens de mogelijkheid om meer controle te krijgen op de toepassing van de regels Trans en UD binnen de context van instructies I7 en I8. De aanpassing die ik doorvoer ten opzichte van de 'diepte eerst'-heuristiek kan intuïtief als volgt worden voorgesteld: indien A het doel is van het zoekproces op een bepaald stadium van het bewijs en A is een positief deel van B, dan wordt B net zolang geanalyseerd tot $[\Delta]A$ is afgeleid in het bewijs (merk op dat $\Delta = \emptyset$ tevens mogelijk is). Stel bijvoorbeeld dat $[p]p$ het tweede element is van de doellijn en $q \supset (r \vee p)$ de premisse die we als eerste invoeren met het oog op de afleiding van p. Volgens beide heuristieken wordt $[q]r \vee p$ afgeleid op lijn 3 van het bewijs. In tegenstelling tot de 'diepte eerst'-heuristiek – die de instructie geeft op zoek te gaan naar q – zal volgens de nieuwe heuristiek $[q, {\sim}r]p$ worden afgeleid op lijn 4.

We kunnen deze heuristiek makkelijk bekomen door instructie I4' als volgt te wijzigen:

I4' Pas een formule-analyserende regel toe om $[\Delta]A$ te bekomen op een lijn i, op voorwaarde dat $B \prec \Delta_{j \leq i-1}$ een positief deel is van A; pas een formule-analyserende regel toe op elk volgend stadium van het bewijs tot $[\Delta']B$ is afgeleid indien $A \neq B$.

Eenmaal we deze heuristiek toepassen is het eenvoudig de verschillende paden van het zoekproces te onderscheiden. Vervolgens kunnen we uit de lijnen die een pad vormen een selectie maken van de lijnen die behoren tot een specifiek doelpad. Een doelpad is een reeks $\langle [\Delta^n]A^n, \ldots, [\Delta^1]A^1 \rangle$ waarbij elke $A^{i+1} \in \Delta^i$ met $1 \leq i < n$.

Het voordeel van transparante zoekpaden blijkt uit het volgende voorbeeld. Stel dat we r trachten af te leiden uit $\Gamma = \{s \supset (r \vee t), p \supset s, {\sim}p \supset q, q \supset (r \vee t), {\sim}t\}$, dan bekomen we het volgende bewijs aan de hand van de 'diepte eerst'-heuristiek.

1	$[r]r$		Doel	$r\|$R25
2	$s \supset (r \vee t)$		Prem	
3	$[s]r \vee t$	2	$\supset$E	$s\|$
4	$p \supset s$		Prem	
5	$[p]s$	4	$\supset$E	$p\|$
6	${\sim}p \supset q$		Prem	
7	$[{\sim}q]p$	6	$\supset$E	${\sim}q\|$
8	$q \supset (r \vee t)$		Prem	
9	$[{\sim}(r \vee t)]{\sim}q$	8	$\supset$E	${\sim}(r \vee t)\|$

10	$[\sim r, \sim t]\sim q$	9	C$\sim\vee$E	$\sim r$|R22
11	$[q]r \vee t$	8	$\supset$E	q|
12	$[\sim p]q$	6	$\supset$E	$\sim p$|
13	$[\sim s]\sim p$	4	$\supset$E	$\sim s$|
14	$[\sim(r \vee t)]\sim s$	2	$\supset$E	$\sim(r \vee t)$|
15	$[\sim r, \sim t]\sim s$	14	C$\sim\vee$E	$\sim r$|R21
16	$[q, \sim t]r$	11	$\vee$E	q|R20
17	$[\sim t, \sim p]r$	12,16	Trans	R19
18	$\sim t$		Prem	
19	$[\sim p]r$	17,18	Trans	$\sim p$|R25
20	$[q]r$	16,18	Trans	q|R25
21	$[\sim r]\sim s$	15,18	Trans	$\sim r$|
22	$[\sim r]\sim q$	10,18	Trans	$\sim r$|
23	$[\sim s]r$	13,19	Trans	$\sim s$|R25
24	$[\sim r]r$	21,23	Trans	R25
25	r	24	UD0	

Een nadere beschouwing van dit bewijs levert ons de volgende informatie. Indien we de afgeleide formule op lijn 3 verder analyseren, dan bekomen we $[s, \sim t]r$; veronderstel op lijn 3'. Wanneer lijn 10 is afgeleid, kunnen we het zoekpad terug construeren waaruit blijkt dat r kan worden afgeleid op de conditie $[\sim r, \sim t]$. Dit betekent echter dat we na herhaaldelijk toepassen van de Trans-regel $[\sim r, \sim t]r$ kunnen afleiden, waarop de regel UD0 kan worden toegepast. In de 'diepte eerst'-heuristiek wordt dit echter uitgesteld naar fase 2 van de heuristiek.

In functie van dit inzicht kunnen we een tweede Trans-regel toevoegen aan het regelsysteem:

Trans2 $$\frac{\langle [\Delta^n \cup \{*A_1\}]A^n, \ldots, [\Delta^1]A^1 \rangle}{[\{*A^1\} \cup \Delta^n \cup \ldots \cup \Delta^2 - \{A^3\} \cup \Delta^1 - \{A^2\}]A^1}$$

Volgens de nieuwe heuristiek ziet het bewijs voor de afleiding van r er als volgt uit:

1	$[r]r$		Doel	R15
2	$s \supset (r \vee t)$		Prem	
3	$[s]r \vee t$	2	$\supset$E	
4	$[s, \sim t]r$	3	$\vee$E	
5	$p \supset s$		Prem	
6	$[p]s$	5	$\supset$E	
7	$\sim p \supset q$		Prem	
8	$[\sim q]p$	7	$\supset$E	
9	$q \supset (r \vee t)$		Prem	
10	$[\sim(r \vee t)]\sim q$	9	$\supset$E	

11	$[\sim r, \sim t]\sim q$	10	C$\sim\vee$E	
12	$[\sim r, \sim t]r$	1,4,6,8,11	Trans2	R13
13	$[\sim t]r$	12	UD0	R15
14	$\sim t$		Prem	
15	r	13,14	Trans	

Ik voer nog een derde Trans-regel toe in functie van de regel UD.

$$\text{Trans3} \qquad \frac{\begin{array}{c}\langle [\Delta^n \cup \{B\}]A^n, \ldots, [\Delta^1]A^1 \rangle \\ [*B]A^1\end{array}}{[\{B\} \cup \Delta^n \cup \ldots \cup \Delta^2 - \{A^3\} \cup \Delta^1 - \{A^2\}]A^1}$$

Merk op dat niet alle toepassingen van Trans en UD uit instructies I7 en I8 hiermee van de baan zijn. De nieuwe Trans-regels laten echter wel toe om in duidelijke gevallen over te gaan tot een versnelde toepassing van de Trans-regel indien dit aanleiding geeft tot de toepassing van UD0 en UD met een R-markering tot gevolg.

2.4 Metatheorie

De metatheorie die ik hier voorstel is gebaseerd op de resultaten uit [21]. Met een bewijs voor $\Gamma \vdash G$ bedoel ik dan ook een bewijs dat wordt bekomen aan de hand van het regelsysteem **PCLc** en de basisheuristiek. Verder kan 'een bewijs voor $\Gamma \vdash G$' naar twee verschillende soorten constructies verwijzen doordat Γ ofwel de volledige verzameling premissen (eindig of oneindig) is ofwel een lid is van een limietreeks van de verzameling premissen. In beide gevallen behoren alle formules die worden geïntroduceerd in het bewijs aan de hand van de premisse-regel tot Γ. Toch zijn beide soorten constructies over het algemeen verschillend daar het mogelijk is dat de regels in verschillende orde worden toegepast.

Ik herinner eraan dat op elk stadium van een **PCLc**-bewijs het bewijs kan eindigen, of stoppen zonder dat het hoofddoel werd afgeleid, of kan worden verder gezet in functie van de heuristiek. Als Γ een oneindige verzameling is en Γ_i een lid van een limietreeks van Γ, dan is het mogelijk dat het bewijs voor $\Gamma_i \vdash G$ stopt (maar niet eindigt), zelfs als het bewijs voor $\Gamma \vdash G$ kan worden verdergezet.

Definitie 5 $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCLc}} [\Delta]A$ *($[\Delta]A$ is afleidbaar uit Γ) alss er een* **PCLc**-*bewijs is uit Γ waarin een lijn voorkomt met $[\Delta]A$ als tweede element. $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCLc}} G$ alss $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCLc}} [\emptyset]G$.*[9]

Theorema 1 *Als $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCLc}} [\Delta]A$, dan $\Gamma \cup \Delta \vdash_{\mathbf{PCL}} A$.*

[9]We spraken reeds af dat het niet-conditioneel afleiden van een formule A op hetzelfde neerkomt als $[\emptyset]A$, waardoor $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCLc}} A$ alss $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCLc}} [\emptyset]A$.

Bewijs Dit kan eenvoudig worden aangetoond door een inductie op de lengte van het bewijs. Het basisgeval is stadium 1, waarop enkel $[G]G$ voorkomt in het bewijs. Het is evident dat $\Gamma \cup \{G\} \vdash_{\mathbf{PCL}} G$. Voor de inductieve stap moeten we in totaal 23 gevallen in aanmerking nemen die elk op zich evident zijn. Zo is de toepassing van de rechtse variant van $\supset$E verantwoord omdat $\Gamma \cup \Delta \cup \{A\} \vdash_{\mathbf{PCL}} B$ volgt uit $\Gamma \cup \Delta \vdash_{\mathbf{PCL}} A \supset B$. De toepassing van de rechtse variant van C$\supset$E kan op een gelijkaardige manier verantwoord worden daar $\Gamma \cup \Delta \cup \{C\} \vdash_{\mathbf{PCL}} A$ volgt uit $\Gamma \cup \Delta \cup \{B \supset C\} \vdash_{\mathbf{PCL}} A$. ■

Corollarium 1 *Als* $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCLc}} G$*, dan* $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCL}} G$*.(Juistheid)*

Ik merk op dat enkel de markeringsdefinities uit 2.3.2 in rekenschap moeten worden gebracht voor wat volgt. Verder wijs ik erop dat indien G niet-conditioneel (i.e. $[\emptyset]G$) is afgeleid in het bewijs, elke lijn waarop $[\Delta]G$ is afgeleid voor een willekeurige $\Delta \neq \emptyset$ R-gemarkeerd is volgens Definitie 1. Ook al heeft het niet direct nut deze markeringen nog neer te schrijven indien deze situatie zich voordoet in het effectief uitwerken van een doelgericht bewijs, toch is het belangrijk dat ze in theorie worden gemarkeerd in functie van wat volgt. Ik introduceer tevens een definitie voor het aftikken van bepaalde formules. Dit behoort niet tot de eigenlijke doelgerichte bewijsprocedure, maar wordt toch ingevoerd in functie van de metatheorie.

Definitie 6 *Een lijn waarop een specifieke formule is afgeleid op een conditie zoals weergegeven in de linkse kolom van tabel 2.2 wordt afgetikt alss dezelfde formule is afgeleid op de conditie(s) zoals weergegeven in de rechtse kolom op dezelfde rij.*

$\Delta \cup \{\mathfrak{a}\}$	$\Delta \cup \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$
$\Delta \cup \{\mathfrak{b}\}$	$\Delta \cup \{\mathfrak{b}_1\}$ en $\Delta \cup \{\mathfrak{b}_2\}$

Tabel 2.2: Aftiktabel

In wat volgt duidt $\mathsf{C}_{A,s}$ de verzameling van alle Δ aan zodat $[\Delta]A$ voorkomt op een niet-gemarkeerde lijn op stadium s van het bewijs. $\mathsf{C}^{\circ}_{A,s}$ wordt op een analoge manier gedefinieerd als $\mathsf{C}_{A,s}$ met als enige uitzondering dat enkel lijnen die niet gemarkeerd zijn en niet afgetikt zijn in rekening worden gebracht.

We zeggen dat een **PCL**-model een verzameling formules Δ falsifieert als en alleen als het niet alle leden van Δ verifieert.

Het bewijs voor Lemma 1 volgt onmiddellijk met het oog op de **PCL**-semantiek, de markeringsdefinities uit 2.3.2 en Definitie 6.

Lemma 1 *Voor om het even welk* **PCLc***-bewijs voor* $\Gamma \vdash G$ *op stadium* s*, falsifieert een* **PCL***-model* M *alle* $\Delta \in \mathsf{C}^{\circ}_{A,s}$ *alss* M *alle* $\Delta \in \mathsf{C}_{A,s}$ *falsifieert.*

Onder een atomaire formule verstaan we een propositionele letter of de negatie ervan. De bewijzen voor Lemma's 2 en 3 zijn voor de hand liggend in het teken van de basisheuristiek.

Lemma 2 *Als een* **PCLc**-*bewijs voor* $\Gamma \vdash G$ *is gestopt maar niet is beëindigd op stadium s, dan bevat* $\mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$ *een eindig aantal eindige verzamelingen van atomaire formules.*[10]

Lemma 3 *Als* Γ *eindig is, dan stopt eender welk* **PCLc**-*bewijs voor* $\Gamma \vdash G$ *op een eindig stadium (met G al dan niet niet-conditioneel afgeleid).*[11]

Het bewijs voor Lemma 4 wordt uitgesteld omdat het lang is en omdat dit de kans biedt het bewijs zodanig uit te werken dat het inzicht verschaft in de bewijsprocedure voor **PCLc**.[12]

Lemma 4 *Als een* **PCLc**-*bewijs voor* $\Gamma \vdash G$ *is gestopt maar niet is beëindigd op stadium s, dan falsifieert een* **PCL**-*model alle* $\Delta \in \mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$.

Lemma 5 *Als* Γ *eindig is en een* **PCLc**-*bewijs voor* $\Gamma \vdash G$ *is gestopt op stadium s, dan is elk* **PCL**-*model dat alle* $\Delta \in \mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$ *falsifieert een model van* Γ.

Bewijs Veronderstel dat het antecedent waar is en dat M alle $\Delta \in \mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$ falsifieert (en dat $\emptyset \notin \mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$). Hieruit volgt dat het bewijs niet is beëindigd. Doordat het bewijs is gestopt maar niet is beëindigd, werd $[\sim A]G$ geïntroduceerd in het bewijs voor alle $A \in \Gamma$. In het teken van Lemma 1 falsifieert M $\sim A$ voor alle $A \in \Gamma$. Het volgt dat M een model is van Γ. ■

Theorema 2 *Als* $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCL}} G$*, dan* $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCLc}} G$*.(Volledigheid)*

Bewijs Veronderstel dat $\Gamma \nvdash_{\mathbf{PCLc}} G$ en beschouw een willekeurig **PCLc**-bewijs voor $\Gamma \vdash G$.

Geval 1: Γ is oneindig.

In het teken van Lemma 3 stopt het bewijs voor $\Gamma_i \vdash G$ zonder te eindigen voor eender welke Γ_i uit de limietreeks $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ van Γ. Laat s het stadium zijn waarop het bewijs stopt.

Volgens Lemma 4 is er een model M dat alle $\Delta \in \mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$ falsifieert. Maar dan is M een model van Γ_i volgens Lemma 5 en falsifieert het alle $\Delta \in \mathsf{C}_{G,s}$ volgens Lemma 1. Daar $\{G\} \in \mathsf{C}_{G,s}$, wordt G gefalsifieerd door M. Derhalve

[10] Als aan de voorwaarde is voldaan, dan geldt eigenlijk voor elke A dat $\mathsf{C}^{\circ}_{A,s}$ een eindig aantal eindige verzamelingen van atomaire formules bevat.

[11] Op basis van König's Lemma kunnen we stellen dat een boomstructuur eindig is als alle takken eindig zijn en er een eindig aantal vertakkingen zijn.

[12] Het is tevens mogelijk dat een korter en meer elegant bewijs kan worden geformuleerd indien diepere inzichten in de werking van de bewijsprocedure aan het licht komen. Vooral de resultaten uit de diagrammatische aanpak van **PCLc** zijn veelbelovend in dit opzicht – zie [15].

is er een model van Γ_i dat G falsifieert, voor om het even welke Γ_i. Door de Compactheid en Volledigheid van **PCL**, $\Gamma \nvdash_{\mathbf{PCL}} G$.

Geval 2: Γ is eindig.

De redenering kan door eenvoudige aanpassingen worden overgenomen uit geval 1. ■

Het bewijs voor Theorema 2 kan vlug worden omgezet naar een bewijs voor:

Theorema 3 *Als* $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCL}} G$*, dan eindigt elk* **PCLc***-bewijs voor* $\Gamma \vdash G$ *op een eindig stadium.(Positieve Test)*

Theorema 4 *Als* Γ *eindig is, dan stopt elk* **PCLc***-bewijs voor* $\Gamma \vdash G$ *en is* $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCL}} G$ *of* $\Gamma \nvdash_{\mathbf{PCL}} G$ *het geval al naar gelang het bewijs al dan niet is beëindigd.*

Bewijs Veronderstel dat Γ eindig is en beschouw een **PCLc**-bewijs voor $\Gamma \vdash G$. Volgens Lemma 3 stopt het bewijs op een eindig stadium. Als G niet-conditioneel ($[\emptyset]G$) werd afgeleid in het bewijs, dan $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCL}} G$ in het teken van Corollarium 1. Als G niet niet-conditioneel werd afgeleid in het bewijs, dan $\Gamma \nvdash_{\mathbf{PCL}} G$ volgens Theorema 2. ■

Corollarium 2 **PCLc***-bewijzen vormen een beslissingsmethode voor* $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

2.4.1 Bewijs voor Lemma 4

Het volgende moet worden aangetoond: als een **PCLc**-bewijs voor $\Gamma \vdash G$ is gestopt maar niet is beëindigd op stadium s, dan falsifieert een **PCL**-model alle $\Delta \in \mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$.

Veronderstel dat een **PCLc**-bewijs voor $\Gamma \vdash G$ gestopt is maar niet is beëindigd op stadium s en dat elk **PCL**-bewijs één of enkele $\Delta \in \mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$ verifieert. We leiden een inconsistentie af uit deze veronderstelling. Ik herinner eraan dat een **PCL**-model een verzameling formules falsifieert als en alleen als ze niet alle leden ervan verifieert. Een verzameling S van verzamelingen atomaire formules wordt *falsifieerbaar* genoemd als en alleen als er een **PCL**-model is dat alle $\Delta \in \mathsf{S}$ falsifieert; ze wordt *minimaal niet-falsifieerbaar* genoemd als en alleen als ze niet-falsifieerbaar is en alle strikte deelverzamelingen ervan falsifieerbaar zijn. Het *letter-aantal* van een verzameling S van verzamelingen atomaire formules geven we het aantal letters aan (met of zonder negatie) die voorkomen in leden van S.

Volgens Lemma 2 bevat $\Delta \in \mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$ een eindig aantal eindige verzamelingen van atomen. Het volgt dat er een $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$ is die minimaal niet-falsifieerbaar is en van dewelke het letter-aantal niet groter is dan die van eender welke andere deelverzameling van $\mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$. Laat Λ de verzameling zijn van de letters die voorkomen (met of zonder negatie) in leden van M. Volgens de veronderstelling is $\mathsf{M} \neq \{\emptyset\}$ en $\Lambda \neq \{\emptyset\}$.

Onder een *selectie* uit $\mathsf{S} = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ verstaan we een verzameling die wordt bekomen door één lid uit elke Δ_i ($1 \leq i \leq n$) te selecteren. Een eenvoudig maar nuttig feit is het volgende:

Feit 1 Als S een verzameling van verzamelingen atomaire formules is, dan is S falsifieerbaar als en alleen als er een consistente selectie uit S bestaat.[13]

Beschouw een arbitraire letter $A \in \Lambda$. M kan drie soorten leden bevatten. Laat

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_n$$

de leden van M zijn die noch A noch $\sim A$ bevatten.
Laat de leden van M die A bevatten de volgende zijn

$$\Delta'_1 \cup \{A\}, \ldots, \Delta'_m \cup \{A\}$$

waarbij A geen lid is van eender welke Δ'_i.
Ten slotte, laat de leden van M die $\sim A$ bevatten de volgende zijn

$$\Delta''_1 \cup \{\sim A\}, \ldots, \Delta''_k \cup \{\sim A\}$$

waarbij $\sim A$ geen lid is van eender welke Δ''_i.

Feit 2 $m > 0$ en $k > 0$.

Doordat $A \in \Lambda$, is $m + k > 0$. Veronderstel dat $m = 0$, met andere woorden, dat A geen lid is van eender welk lid van M. Daar M een minimaal niet-falsifieerbare verzameling is, is $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ een falsifieerbare verzameling. Volgens Feit 1 is er een consistente selectie Θ van $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$. Doordat A geen lid is van de selectie, is $\Theta \cup \{\sim A\}$ een consistente selectie uit $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Delta''_1 \cup \{\sim A\}, \ldots, \Delta''_k \cup \{\sim A\}\}$. Dus, als $m = 0$, dan is M falsifieerbaar in het teken van Feit 1. Dit is echter onmogelijk.[14] Eenzelfde redenering kan gevolgd worden voor $k > 0$.

Feit 3 $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Delta'_1, \ldots, \Delta'_m\}$ is een niet-falsifieerbare verzameling.

Indien deze verzameling falsifieerbaar was, dan zou er een consistente selectie Θ van zijn en doordat A niet voorkomt in eender welke Δ_i of Δ'_i, zou $\Theta \cup \{\sim A\}$ een consistente selectie uit M zijn. Dit is onmogelijk volgens Feit 1, daar M niet-falsifieerbaar is.
Door een gelijkaardige redenering bekomen we:

[13] Een model falsifieert elke atomaire formule in een selectie, en falsifieert vervolgens alle Δ_i als en alleen als de selectie consistent is.

[14] Het is echter niet uitgesloten dat $m = 1$ en dat $\Delta'_1 = \emptyset$; noch is het uitgesloten dat $n = 0$.

Feit 4 $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Delta''_1, \ldots, \Delta''_k\}$ is een niet-falsifieerbare verzameling.

Beschouw de volgende verzameling van verzamelingen atomaire formules:

$$\mathsf{X} = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_n, \Delta'_1 \cup \Delta''_1, \ldots, \Delta'_1 \cup \Delta''_k, \Delta'_2 \cup \Delta''_1, \ldots, \Delta'_m \cup \Delta''_k\}$$

Feit 5 X is een niet-falsifieerbare verzameling.

Veronderstel dat er een consistente selectie Θ van X is. Θ bevat een lid van elke Δ_i. Daarenboven is het makkelijk in te zien dat Θ ofwel een lid van elke Δ'_i $(1 \leq i \leq m)$ bevat ofwel een lid van elke Δ''_i $(1 \leq i \leq k)$ bevat.[15] Door Feiten 1, 3 en 4 en doordat Θ consistent is volgt dat X een niet-falsifieerbare verzameling is.

Laat X' de verzameling van consistente leden van X zijn. Doordat elk lid van $\mathsf{X} - \mathsf{X}'$ wordt gefalsifieerd door alle modellen, volgt dat:

Feit 6 X' is een niet-falsifieerbare verzameling.

Het is instructief om dit uiteen te zetten in termen van selecties. Veronderstel dat $\Delta \in \mathsf{X} - \mathsf{X}'$ en dat er een consistente selectie Θ is van $\mathsf{X} - \{\Delta\}$. Doordat Δ inconsistent is, is er een propositionele letter B zodat $B, \sim B \in \Delta$. Daar Θ consistent is, is of B of $\sim B$ geen lid van Θ. Als $B \notin \Theta$, dan is $\Theta \cup \{\sim B\}$ een consistente selectie uit X. Als $\sim B \notin \Theta$, dan is $\Theta \cup \{B\}$ een consistente selectie uit X. Beide zijn onmogelijk volgens Feiten 1 en 5.

Daar X' een niet-falsifieerbare verzameling is, is er een $\mathsf{X}'' \subseteq \mathsf{X}'$ minimaal niet-falsifieerbaar. Bovendien is het letter-aantal van X'' kleiner dan het letter-aantal van M – de verzameling letters die (met of zonder negatie) voorkomen in leden van X'' is een deelverzameling of strikte deelverzameling van $\Lambda - \{A\}$. Ten slotte, doordat $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$, weten we dat $\mathsf{X}'' \subset \mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$ in het teken van instructie 7 en Feit 2. Dit staat in contradictie met het feit dat M minimaal niet-falsifieerbaar is en dat het letter-aantal van M niet groter is dan dat van eender welke andere deelverzameling van $\mathsf{C}^{\circ}_{G,s}$.

Door de afleiding van een inconsistentie uit de basisveronderstelling, is Lemma 4 bewezen. Waar dit precies op neerkomt met betrekking tot de bewijzen kunnen we als volgt verhelderen: als een bewijs voor $\Gamma \vdash G$ is gestopt en de verzameling condities waaronder G voorkomt in het bewijs is niet-falsifieerbaar, dan garandeert instructie 7 dat G niet-conditioneel voorkomt in het bewijs.

[15]Als Θ geen lid bevat van bepaalde Δ'_i, dan bevat het een lid van elke Δ''_j, daar het een lid van elke $\Delta'_i \cup \Delta''_1, \ldots, \Delta'_i \cup \Delta''_k$ moet bevatten.

Hoofdstuk 3

Uitbreiding naar de volledige Klassieke Logica

In dit hoofdstuk behandel ik een predikatieve extensie van het regelsysteem **PCLc** – i.e. **CLc** – die als aanzet dient voor een doelgerichte bewijsprocedure voor **CL**. Opnieuw wordt het regelsysteem ontwikkeld in functie van het nieuwe bewijsformaat. Het gaat hierbij om een uitbreiding van de formule- en conditie-analyserende regels en de aanvullende regels uit 2.2.3. Ook de recursieve definitie voor de 'positief deel'-relatie wordt uitgebreid zodat opnieuw kan gesteund worden op een doelgerichte selectie van premissen en formules in het zoekproces naar een hoofddoel G of de subdoelen die hieruit voortvloeien. Een heuristiek werd nog niet ontwikkeld en ook de markeringsdefinities zijn nog niet op punt gesteld. Toch zal ik proberen de voorbeelden op een zo eenzijdig mogelijke manier uit te werken. De markeringen laat ik achterwege.

In bijlage A is een nota opgenomen die is uitgewerkt in samenwerking met Diderik Batens en Peter Verdée. Daarin wordt een alternatieve aanpak beschreven voor **CLc** die gebruik maakt van skolemisatie. Het correctheidsbewijs dat Diderik voor deze versie heeft uitgewerkt laat ik echter achterwege, aangezien ik hier geen bijdrage aan heb geleverd.

3.1 Aanzet

Vooraleer van start te gaan met de beschrijving van het regelsysteem, geef ik in algemene termen weer hoe we de inferentieregels voor de predikatieve versie van de klassieke logica – zoals voorgesteld in [5] – kunnen vertalen in een vorm die voldoet aan de eisen van het nieuwe bewijsformaat. Meer bepaald baseer ik mij op het regelsysteem **PL** = omdat in **CLc** ook de regels voor de 'identiteit' zijn opgenomen.

Eerst en vooral stel ik het volgende expliciet: voor het taalschema van **CLc** baseer ik mij op het taalschema **PL** uit [5], uitgebreid met de logische term voor 'identiteit'.[1] Naast de verzameling $\mathcal{S}$ van schematische letters voor zinnen treffen we hier ook de volgende verzamelingen van schematische letters aan:

(i) $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, \ldots\}$: verzameling van schematische letters voor individuele variabelen
(ii) $\mathcal{C} = \{a, b, c, d, e, a_1, \ldots\}$: verzameling van schematische letters voor individuele constanten
(iii) $\mathcal{P} = \{P, Q, R, S, T, P_1, \ldots\}$: verzameling van schematische letters voor predikatieve constanten

Verder moeten de connectieven uit **PC** worden uitgebreid met drie logische termen, namelijk de quantoren $\forall$ en $\exists$ en de logische term $=$ voor 'identiteit'. Om verwarring te vermijden stel ik ook het volgende expliciet. Wanneer $\alpha \in \mathcal{V}$, dan is $A(\alpha)$ een formule waarin α – mogelijk meer dan eens – vrij voorkomt.[2] Als $\beta \in \mathcal{V} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{A}$, dan bekomt men $A(\beta)$ door in $A(\alpha)$ elk vrij voorkomen van α te vervangen door β.[3]

De problemen die zich stellen bij het ontwikkelen van een doelgericht regelsysteem voor **CL** vloeien in hoofdzaak voort uit de regels die toelaten een instantie af te leiden uit een gequantificeerde formule en de regels die toelaten te generaliseren tot een gequantificeerde formule. In [5] komt dit neer op de volgende regels:[4]

UI	$(\forall\alpha)A \ / \ A(\beta/\alpha)$
EG	$A(\beta/\alpha) \ / \ (\exists\alpha)A$
UG	$A(\beta//\alpha) \ / \ (\forall\alpha)A$ op voorwaarde dat β niet voorkomt in een premisse of niet-uitgeschakelde hypothese
MPE	$(\exists\alpha)A, A(\beta//\alpha) \supset B \ / \ B$ op voorwaarde dat β niet voorkomt in B en niet voorkomt in een premisse of niet-uitgeschakelde hypothese

Zoals eerder vermeld kunnen deze regels opgesplitst worden in twee groepen. De regels UI en MPE die instaan voor de afleiding van een instantie uit

[1] Het zal duidelijk worden dat we het taalschema **PL** moeten uitbreiden met twee nieuwe soorten schematische letters voor individuele constanten, i.e. $\mathcal{A}$ en $\mathcal{X}$ – zie respectievelijk 3.2.1 en 3.2.4.

[2] Het is niet noodzakelijk dat α minstens één keer vrij voorkomt, maar als het geen enkele keer vrij voorkomt, dan $A(\beta) = A(\alpha)$, voor elke β.

[3] De betekenis van de leden van $\mathcal{A}$ zal in de loop van dit deel worden verhelderd.

[4] Doordat de voorwaarden die verbonden zijn aan het toepassen van bepaalde regels verschillend zijn voor **PL**$=$ en **CLc** gebruik ik hier nog de notatie zoals ze wordt aangewend in [5]. Als $\alpha, \beta \in \mathcal{C} \cup \mathcal{V}$, dan is $A(\beta/\alpha)$ de formule die wordt bekomen door α overal waar ze vrij voorkomt in A te vervangen door β; voor $A(\beta//\alpha)$ komt hierbij de voorwaarde dat β nog niet voorkomt in A wanneer we de vervanging doorvoeren. In de voorgestelde regels is $\alpha \in \mathcal{V}$ en $\beta \in \mathcal{C}$.

gequantificeerde formules en de regels EG en UG die toelaten bepaalde formules te generaliseren tot gequantificeerde formules. In termen van een doelgericht regelsysteem komt dit neer op het volgende: ofwel komt een specifieke instantie voor in een conditie waardoor we nood hebben aan formule-analyserende regels die de taak van UI en MPE kunnen vervullen indien een gequantificeerde formule aanwezig is in de premissen waaruit deze specifieke instantie kan worden afgeleid, ofwel komt een gequantificeerde formule voor in een conditie die we aan de hand van conditie-analyserende regels moeten kunnen herleiden tot een formule waaruit deze afleidbaar is volgens de regels EG en UG.

De regels voor de universele quantor lijken in eerste instantie evident. De formule-analyserende regel $\forall$E moet gewoon toelaten dat we uit een formule van de vorm $(\forall\alpha)A(\alpha)$, $A(\beta)$ kunnen afleiden voor eender welke $\beta \in \mathcal{C}$. Voor de conditie-analyserende regel C$\forall$E lijkt het voldoende dat we het zoekproces naar een formule van de vorm $(\forall\alpha)A(\alpha)$ omzetten in een zoekproces naar een formule van de vorm $A(\beta)$ voor eender welke $\beta \in \mathcal{C}$ die niet voorkomt in de premissen. Daar **CLc** een extensie is van **PCLc** en het tot nu niet noodzakelijk bleek subbewijzen in te voeren, hoeven we geen rekening te houden met niet-uitgeschakelde hypothesen.

De herformulering van de regels EG en MPE in termen van prospectieve dynamiek, kan het best worden verhelderd aan de hand van een voorbeeld. Indien we $(\exists x)Qx$ willen afleiden uit $(\forall x)(Px \supset Qx)$ en $(\exists x)Px$, dan bekomen we via **PL** = het volgende Fitch-stijl bewijs:

1	$(\forall x)(Px \supset Qx)$		Prem
2	$(\exists x)Px$		Prem
3	$\mid\ Pa$		Hyp
4	$\mid\ (\forall x)(Px \supset Qx)$	1	Reit
5	$\mid\ Pa \supset Qa$	4	UI
6	$\mid\ Qa$	3,5	MP
7	$\mid\ (\exists x)Qx$	7	EG
8	$Pa \supset (\exists x)Qx$	3,7	VB
9	$(\exists x)Qx$	2,8	MPE

In een doelgericht bewijs vertrekken we van het hoofddoel, in dit geval $(\exists x)Qx$. Indien dit hoofddoel niet rechtstreeks kan worden afgeleid uit de premissen, dan kan het zoekproces worden herleid tot het zoeken naar een formule van de vorm $Q(\beta)$ voor eender welke $\beta \in \mathcal{C}$. Dit is volledig in overeenstemming met de regel EG. Indien $Q(\beta)$ kan worden afgeleid uit een universeel gequantificeerde formule, dan doet het er niet toe naar welke $\beta \in \mathcal{C}$ we op zoek gaan. $Q(\beta)$ kan echter ook voor één of meerdere welbepaalde constante(n) voorkomen in de premissen en al dan niet conditioneel afleidbaar zijn. Het zoekproces naar $(\exists x)Qx$ herleiden tot $Q(\beta)$ voor elke $\beta \in \mathcal{C}$ die voorkomt in de premissen kan enkel en alleen resulteren in een omslachtig zoekproces en is bovendien in strijd met de specifieke invulling die we in dit geval geven aan het zoeken naar een formule van de vorm $Q(\beta)$, namelijk *voor eender welke* $\beta \in \mathcal{C}$. Het probleem wordt nog pregnanter daar we ook rekening moeten houden met leden van het domein die we in het Fitch-stijl bewijs een naam geven aan de hand van een hypothese. Hiervoor moeten we enkel aannemen dat er een voldoende voorraad aan constanten is om de hypothese in te voeren.

Een zinnige oplossing hiervoor blijkt de volgende: indien een formule van de vorm $(\exists\alpha)A(\alpha)$ voorkomt in een conditie, dan herleiden we het zoekproces naar $A(o)$. Hierbij treedt o op als een dummy-constante die verder kan gespecificeerd worden al naar gelang de informatie die we krijgen uit het verder verloop van het bewijs. Wordt op een later stadium $A(\beta)$ afgeleid voor een welbepaalde $\beta \in \mathcal{C}$, dan kunnen we ons zoekproces baseren op $A(\beta)$. Dit doet niks af aan de doelgerichtheid van de bewijsprocedure. In eerste instantie gaan we op zoek naar $(\exists\alpha)A(\alpha)$ door het zoekproces te richten op $A(\beta)$ voor om het even welke β; hetgeen in de conditie wordt weergegeven door de dummy-constante o. Blijkt later dat $A(\beta)$ al dan niet conditioneel afleidbaar is uit de premissen voor een specifieke β, dan kunnen we het zoekproces specificeren naar $A(\beta)$ naar deze welbepaalde constante. In het regelsysteem zal dit worden opgevangen door de regel CDet.

Deze oplossing leidt eveneens tot een eenvoudige vertaling van de regel MPE in **CLc**. Indien een formule van de vorm $(\exists\alpha)A(\alpha)$ voorkomt in de premissen, dan mag men hieruit de formule $A(\beta)$ afleiden voor één nieuwe β, i.e. een constante die noch voorkomt in de premissen, noch op enig vorig stadium van het bewijs.

Voor elke existentieel gequantificeerde formule die voorkomt in een conditie instantiëren we eenmalig met een nieuwe dummy-constante wanneer we overgaan tot de toepassing van C∃E. Dat het voorgaande noodzakelijk is blijkt uit de volgende situatie: de condities $[Pao, Qao]$ en $[Pao, Qao']$, die respectievelijk kunnen voortvloeien uit de condities $[(\forall x)(\exists y)(Pxy \wedge Qxy)]$ en $[(\forall x)(\exists y)(\exists z)(Pxy \wedge Qxz]$ indien a niet voorkomt in de premissen, geven weer dat in het eerste geval $Qa(\beta)$ moet worden afgeleid indien we reeds $Pa(\beta)$ al dan niet conditioneel konden afleiden, daar waar in het tweede geval ook $Qa(\gamma)$ (met $\beta, \gamma \in \mathcal{C}$ en $\beta \neq \gamma$) kan volstaan.

Deze specifieke invulling van de regels ∃E en C∃E heeft echter gevolgen voor de regels betreffende de universele quantor. Doordat ∃E toelaat om nieuwe elementen van $\mathcal{C}$ te introduceren in een bewijs, moet de voorwaarde voor de regel C∀E zodanig worden uitgebreid dat $\beta \in \mathcal{C}$ niet mag voorkomen in de premissen, noch op enig stadium in het bewijs voorafgaand aan de toepassing ervan.

Trachten we met de huidige toestand van de regels $(\exists x)Qx$ af te leiden uit $(\forall x)(Px \supset Qx)$ en $(\exists x)Px$, dan botsen we op het volgende probleem: $(\exists x)Qx$ kan worden afgeleid indien we $Q(\beta)$ kunnen afleiden voor om het even welke $\beta \in \mathcal{C}$; uit $(\forall x)(Px \supset Qx)$ kunnen we $[P(\beta)]Q(\beta)$ afleiden, maar eenmaal β is gedetermineerd door toepassing van ∀E verliezen we de mogelijkheid op zoek te gaan naar een tot dan toe onbepaalde constante, in dit geval af te leiden uit $(\exists x)Px$. Het is dan ook noodzakelijk om bij de toepassing van ∀E ook de introductie van één dummy-constante toe te laten die nog niet voorkomt op enig vorig stadium van het bewijs.

Ik maak de voorgestelde oplossing aanschouwelijk aan de hand van het voorgaande voorbeeld.

1	$[(\exists x)Qx](\exists x)Qx$		Doel
2	$[Qo](\exists x)Qx$	1	∃E
3	$(\forall x)(Px \supset Qx)$		Prem
4	$Po' \supset Qo'$	3	∀E
5	$[Po']Qo'$	4	⊃E
6	$(\exists x)Px$		Prem
7	Pa	6	∃E
8	$[Pa]Qa$	5	CDet
9	Qa	7,8	Trans
10	$[Qa](\exists x)Qx$	2	CDet
11	$(\exists x)Qx$	9,10	Trans

Indien we geen gebruik zouden maken van de dummy-constanten, dan zou de 'positief deel'-relatie zo gedefinieerd moeten worden dat $(\exists x)Qx$ een positief deel is van $(\exists x)Px$. Het zoekproces naar $(\exists x)Qx$ zou namelijk herleid worden tot $Q\beta$ voor een $\beta \in \mathcal{C}$ waarna $P\beta \supset Q\beta$ kan worden afgeleid uit $(\forall x)(Px \supset Qx)$. Uit $(\exists x)Px$ kan $P\beta$ echter niet worden afgeleid voor om het even welke $\beta \in \mathcal{C}$. Zonder dieper in te gaan op de manier waarop de 'positief deel'-relatie hiervoor zou moeten gedefinieerd worden, geef ik even weer hoe een doelgericht bewijs er in dit geval zou uitzien:

1	$[(\exists x)Qx](\exists x)Qx$		Doel
2	$(\forall x)(Px \supset Qx)$		Prem
3	$(\exists x)Px$		Prem
4	Pa	3	∃E
5	$Pa \supset Qa$	2	∀E
6	$[Pa]Qa$	5	⊃E
7	Qa	4, 6	Trans
8	$[Qa](\exists x)Qx$	1	C∃E
9	$(\exists x)Qx$	7,8	Trans

Uit dit voorbeeld blijkt duidelijk dat we een deel van het zoekproces verliezen in de weergave van het bewijs, daar dit is opgenomen in de 'positief deel'-bepaling. In dit geval verschilt het bewijs zelfs nauwelijks van de Fitch-stijl versie. Aangezien het de bedoeling is om zoveel mogelijk van het zoekproces op te nemen in de bewijzen zelf, en de taak van de 'positief deel'-relatie te beperken tot het selecteren van nuttige premissen, blijkt dit een minder interessante optie.

3.2 Een regelsysteem voor CLc

3.2.1 Uitbreiding van het taalschema en afkortingen

Ik breid in eerste instantie het taalschema uit met een verzameling nieuwe constanten in functie van de regels C∃E en ∀E:

$\mathcal{A} = \{o, o', o'', \ldots\}$: verzameling van schematische letters voor de nieuwe ('arbitraire') constanten ($\mathcal{C} \cap \mathcal{A} = \emptyset$)

Voor de definiëring van de regels voer ik tevens de volgende lijst van afkortingen in:

(i) $\mathcal{C}_p$: leden van $\mathcal{C}$ die voorkomen in de premissen
(ii) $\mathcal{C}_s$: leden van $\mathcal{C}$ die voorkomen in het bewijs op stadium s[5]
(iii) $\mathcal{A}_s$: leden van $\mathcal{A}$ die voorkomen in het bewijs op stadium s
(iv) A^{γ}_{β}: resulteert uit de vervanging van elk voorkomen van β in A door γ
(v) $\Delta^{\gamma}_{\beta} = \{A^{\gamma}_{\beta} \mid A \in \Delta\}$
(vi) C(A): de verzameling constanten (van om het even welke soort) die voorkomen in A
(vii) $\mathrm{C}(\Delta) = \bigcup\{\mathrm{C}(A) \mid A \in \Delta\}$

3.2.2 Het linken van formules met andere formules: predikatief

Voor de predikatieve uitbreiding behouden we tabel 5.1. De regels voor de negatie van quantoren vallen onder de algemene vorm van formule- en conditie-analyserende formules zoals voorgesteld in 2.2.3 indien we de $\mathfrak{a}$-kolom van tabel 5.1 als volgt uitbreiden:

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$
$\sim(\forall\alpha)A(\alpha)$	$(\exists\alpha) * A(\alpha)$	$(\exists\alpha) * A(\alpha)$
$\sim(\exists\alpha)A(\alpha)$	$(\forall\alpha) * A(\alpha)$	$(\forall\alpha) * A(\alpha)$

3.2.3 De Regels

Formule-Analyserende Regels

∀E $\quad \dfrac{[\Delta](\forall\alpha)A(\alpha)}{[\Delta]A(\beta)}$ voor eender welke $\beta \in \mathcal{C}^6$ en voor één $\beta \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_s$

[5] s is het stadium waarop de regel wordt toegepast en waarvan de toepassing resulteert in $s + 1$.

[6] In de uitwerking van de heuristiek zal dit beperkt worden tot $\beta \in \mathcal{C}_s$.

∃E $\dfrac{[\Delta](\exists\alpha)A(\alpha)}{[\Delta]A(\beta)}$ voor één $\beta \in \mathcal{C} - (\mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_p)$

Conditie-Analyserende Regels

C∀E $\dfrac{[\Delta \cup \{(\forall\alpha)A(\alpha)\}]A}{[\Delta \cup \{A(\beta)\}]A}$ voor één $\beta \in \mathcal{C} - (\mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_p)$

C∃E $\dfrac{[\Delta \cup \{(\exists\alpha)A(\alpha)\}]A}{[\Delta \cup \{A(\beta)\}]A}$ voor één $\beta \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_s$

CDet indien $\beta \in \mathcal{A}$: $\dfrac{[\Delta]A}{[\Delta^{\gamma}_{\beta}]A^{\gamma}_{\beta}}$ $\gamma \in \mathcal{C}$[7]

Regels voor =

C=E1 $\dfrac{[\Delta \cup \{B(\beta)\}]A \quad [\Delta']\gamma = \beta}{[\Delta \cup \Delta' \cup \{B(\gamma)\}]A}$ en $\dfrac{[\Delta \cup \{B(\beta)\}]A \quad [\Delta']\beta = \gamma}{[\Delta \cup \Delta' \cup \{B(\gamma)\}]A}$

C=E2 $\dfrac{[\Delta \cup \{\alpha = \alpha\}]A}{[\Delta]A}$

C∼=E1 $\dfrac{[\Delta \cup \{\sim\alpha = \beta\}]A \quad [\Delta']B(\alpha)}{[\Delta \cup \Delta' \cup \{*B(\beta)\}]A}$ en $\dfrac{[\Delta \cup \{\sim\alpha = \beta\}]A \quad [\Delta']B(\beta)}{[\Delta \cup \Delta' \cup \{*B(\alpha)\}]A}$

C=∼E2 $\dfrac{[\Delta \cup \{\sim\alpha = \beta\}]A \quad [\Delta' \cup \{B(\alpha)\}]A}{[\Delta \cup \Delta' \cup \{B(\beta)\}]A}$ en $\dfrac{[\Delta \cup \{\sim\alpha = \beta\}]A \quad [\Delta' \cup \{B(\beta)\}]A}{[\Delta \cup \Delta' \cup \{B(\alpha)\}]A}$

Voor de laatste twee regels ben ik er nog niet in geslaagd één regel te ontwikkelen die beide situaties kan opvangen. Indien we $Pa, \sim Pb \vdash_{\mathbf{CLc}} \sim a = b$ willen bewijzen, dan kan enkel de eerste variant ons van dienst zijn. In het geval we $\vdash_{\mathbf{CLc}} (Pa \wedge \sim Pb) \supset \sim a = b$ willen bewijzen, hebben we nood aan de tweede variant. Voor een toepassing van C=E1 geef ik nog even het volgende voorbeeld mee:

$(\exists x)Px, (\forall x)(Px \supset (Qx \wedge (\forall y)(Qy \supset y = x))), Qa \vdash Pa$

1	$[Pa]Pa$		Doel
2	$(\forall x)(Px \supset (Qx \wedge (\forall y)(Qy \supset y = x)))$		Prem
3	$Pa \supset (Qa \wedge (\forall y)(Qy \supset y = a))$	2	∀E
4	$[Pa]Qa \wedge (\forall y)(Qy \supset y = a)$	3	⊃E
5	$Po \supset (Qo \wedge (\forall y)(Qy \supset y = o))$	2	∀E
6	$[Po]Qo \wedge (\forall y)(Qy \supset y = o)$	5	⊃E

[7] In de heuristiek zal dit beperkt worden tot $\gamma \in (\mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_p)$.

7	$(\exists x)Px$		Prem
8	Pb	7	$\exists$E
9	$[Pb]Qb \wedge (\forall y)(Qy \supset y = b)$	6,8	CDet
10	$Qb \wedge (\forall y)(Qy \supset y = b)$	8,9	Trans
11	$(\forall y)(Qy \supset y = b)$	10	$\wedge$E
12	$Qa \supset a = b$	11	$\forall$E
13	$[Qa]a = b$	12	$\supset$E
14	Qa		Prem
15	$a = b$	13,14	Trans
16	$[Pb]Pa$	1,15	C=1
17	Pa	8,16	Trans

3.2.4 Probleem met huidige regels

De voorgestelde regels zijn echter niet voldoende. Ze laten namelijk toe bepaalde formules af te leiden die niet afleidbaar zouden mogen zijn. Nemen we het volgende voorbeeld:

$$(\forall x)(\exists y)Pxy \nvdash_{\mathbf{CL}} (\exists y)(\forall x)Pxy$$

1	$[(\exists y)(\forall x)Pxy](\exists y)(\forall x)Pxy$		Doel
2	$[(\forall x)Pxo](\exists y)(\forall x)Pxy$	1	C$\exists$E
3	$[Pao](\exists y)(\forall x)Pxy$	2	C$\forall$E
4	$(\forall x)(\exists y)Pxy$		Prem
5	$(\exists y)Pay$	4	$\forall$E
6	Pab	5	$\exists$E
7	$[Pab](\exists y)(\forall x)Pxy$	3	CDet
8	$(\exists y)(\forall x)Pxy$	6,7	Trans

Het probleem kan het best als volgt worden verhelderd: indien we de afleidbaarheid van $(\exists y)(\forall x)Pxy$ baseren op de afleiding van Pab uit de premissen, dan moet dit gebeuren onder de voorwaarde dat ook Pbb, Pcb, etc. kunnen worden afgeleid uit de premissen. Dit is bijvoorbeeld het geval indien we $(\exists y)(\forall x)Pxy$ willen afleiden uit $(\forall x)Pxa$.

De oplossing die ik hier wil voorstellen bestaat erin nog een verzameling van nieuwe constanten in te voeren, waarvan de determinatie afhangt van de precieze invulling die we geven aan eerder ingevoerde dummy-constanten door de regel CDet. Met betrekking tot het vorige voorbeeld komt dit neer op het volgende: doordat in de conditie van de formule op lijn 2 reeds een dummy-constante voorkomt, wachten we met de specifieke invulling van de nieuwe constante die we invoeren aan de hand van de regel C$\forall$E. Eenmaal de dummy-constante gespecificeerd is door de toepassing van CDet, kan de nieuwe constante worden gedetermineerd met een $\beta \in \mathcal{C}$. Indien we hierbij eisen dat deze constante noch mag voorkomen in het bewijs, noch in de premissen, dan krijgen we het volgende resultaat met betrekking tot het voorbeeld:

1	$[(\exists y)(\forall x)Pxy](\exists y)(\forall x)Pxy$		Doel
2	$[(\forall x)Pxo](\exists y)(\forall x)Pxy$	1	C$\exists$E
3	$[P\mathrm{x}^{\{o\}}o](\exists y)(\forall x)Pxy$	2	C$\forall$E2
4	$(\forall x)(\exists y)Pxy$		Prem
5	$(\exists y)Pay$	4	$\forall$E
6	Pab	5	$\exists$E
7	$[P\mathrm{x}^{\{b\}}b](\exists y)(\forall x)Pxy$	3	CDet
8	$[Pcb](\exists y)(\forall x)Pxy$	7	XDet

Het is duidelijk dat we na stadium 8 wel in staat zijn $(\exists y)Pcy$ af te leiden, maar dat de regel $\exists$E ons niet meer toelaat hierna Pcb af te leiden.

We moeten er echter rekening mee houden dat in sommige gevallen $\mathcal{X}$-constanten worden ingevoerd waar dit eigenlijk niet nodig is. Neem het volgende voorbeeld: $(\forall x)Px \vdash_{\mathbf{CL}} (\exists y)(\forall x)(Px \vee Qxy)$. Indien we dit geval uitwerken aan de hand van een **CLc**-bewijs, dan krijgen we de volgende ongewenste situatie:

1	$[(\exists y)(\forall x)(Px \vee Qxy)](\exists y)(\forall x)(Px \vee Qxy)$		Doel
2	$[(\forall x)(Px \vee Qxo)](\exists y)(\forall x)(Px \vee Qxy)$	1	C$\exists$E
3	$[P\mathrm{x}^{\{o\}} \vee Q\mathrm{x}^{\{o\}}o](\exists y)(\forall x)(Px \vee Qxy)$	2	C$\forall$E2
4	$[P\mathrm{x}^{\{o\}}](\exists y)(\forall x)(Px \vee Qxy)$	3	C$\vee$E

Het is duidelijk dat we hier eigenlijk op zoek kunnen gaan naar $P(\beta)$ met $\beta \in C - (C_s \cup C_p)$ waarbij β niet afhankelijk is van de invulling die we geven aan o met de regel CDet.

Om dit mogelijk te maken breid ik het taalschema nogmaals uit met een nieuwe verzameling schematische letters voor, in dit geval geïndexeerde, constanten:

$\mathcal{X} = \{\mathrm{x}^{\Theta} \mid \Theta \subset \mathcal{C} \cup \mathcal{A}\}$ waarbij $\Theta \subset \mathcal{C} \cup \mathcal{A}$ een eindige verzameling is.

Ik stel hierbij het volgende:

Als $\mathrm{x}^{\Theta} \in \mathrm{C}(A)$, dan $\Theta \subset \mathrm{C}(A)$. Dit komt erop neer dat, als een geïndexeerde formule voorkomt in een formule A, de leden van de index ook voorkomen in A.

Voor de formulering van de XDet-regel kan ik dan ook de volgende verzameling constanten bepalen:

$\mathrm{C}^{\mathrm{X}}(A) = \{\beta \mid \mathrm{x}^{\Theta} \in \mathrm{C}(A) \text{ en } \beta \in (\Theta \cap \mathcal{A})\}$

Nieuwe Conditie-Analyserende regels voor $\forall$

De conditie-analyserende regel die we zonet invoerden moet vervangen worden door de volgende twee regels:

C∀E1	indien $\mathrm{C}(\mathrm{A}(\alpha)) \cap \mathcal{A} = \emptyset$:	$\dfrac{[\Delta \cup \{(\forall\alpha)A(\alpha)\}]A}{[\Delta \cup \{A(\beta)\}]A}$	voor één $\beta \in \mathcal{C} - (\mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_p)$
C∀E2	indien $\mathrm{C}(\mathrm{A}(\alpha)) \cap \mathcal{A} = \Theta$:	$\dfrac{[\Delta \cup \{(\forall\alpha)A(\alpha)\}]A}{[\Delta \cup \{A(\mathrm{x}^{\Theta})\}]A}$	

De determinatie van $\mathcal{X}$-constanten

Indien $(\star)$ staat voor de volgende uitdrukking:

$\mathrm{C}^{\mathrm{X}}(B(\mathrm{x}^{\Theta})) \cap \mathrm{C}((B(\mathrm{x}^{\Theta}) - \mathcal{X}) = \emptyset$

dan kan de XDet-regel als volgt worden geformuleerd:

XDet	indien $\Theta \cap \mathcal{A} = \emptyset$ of $(\star)$:	$\dfrac{[\Delta \cup \{B(\mathrm{x}^{\Theta})\}]A}{[\Delta^{\gamma}_{\mathrm{x}^{\Theta}} \cup \{B^{\gamma}_{\mathrm{x}^{\Theta}}\}]A}$	voor één $\gamma \in \mathcal{C} - (\mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_p)$

Ik illustreer de tweede conditie-analyserende regel voor $\forall$ aan de hand van

$(\forall x)(\forall z)(\exists y)Pxyz \vdash_{\mathbf{CLc}} (\exists z)(\forall x)(\exists y)Pxyz$

1	$[(\exists z)(\forall x)(\exists y)Pxyz](\exists z)(\forall x)(\exists y)Pxyz$		Doel	R14
2	$[(\forall x)(\exists y)Pxyo](\exists z)(\forall x)(\exists y)Pxyz$	1	C∃E	R14
3	$[(\exists y)P\mathrm{x}^{\{o\}}yo](\exists z)(\forall x)(\exists y)Pxyz$	2	C∀E2	R14
4	$[P\mathrm{x}^{\{o\}}o'o](\exists z)(\forall x)(\exists y)Pxyz$	3	C∃E	R14
5	$(\forall x)(\forall z)(\exists y)Pxyz$		Prem	
6	$(\forall z)(\exists y)Payz$	5	∀E	
7	$(\exists y)Paya$	6	∀E	
8	$[P\mathrm{x}^{\{a\}}o'a](\exists z)(\forall x)(\exists y)Pxyz$	4	CDet	R14
9	$[Pbo'a](\exists z)(\forall x)(\exists y)Pxyz$	8	XDet	R14
10	$(\forall z)(\exists y)Pbyz$	5	∀E	
11	$(\exists y)Pbya$	10	∀E	
12	$Pbca$	11	∃E	
13	$[Pbca](\exists z)(\forall x)(\exists y)Pxyz$	9	CDet	R14
14	$(\exists z)(\forall x)(\exists y)Pxyz$	12,13	Trans	

Vooraleer over te gaan tot de 'positief deel'-relatie voor **CLc** geef ik nog even een illustratie van een toepassing van de EM-regel uit hoofdstuk 2 in de context van predikatieve formules.

$(\forall x)(\exists y)(Px \supset Qy) \vdash (\exists x)Px \supset (\exists y)Qy.$

1	$[(\exists x)Px \supset (\exists y)Qy](\exists x)Px \supset (\exists y)Qy$		Doel
2	$[\sim(\exists x)Px](\exists x)Px \supset (\exists y)Qy$	1	C⊃E
3	$[(\forall x)\sim Px](\exists x)Px \supset (\exists y)Qy$	2	C∼∃E
4	$[\sim Pa](\exists x)Px \supset (\exists y)Qy$	3	C∀E
5	$(\forall x)(\exists y)(Px \supset Qx)$		Prem
6	$(\exists y)(Pa \supset Qy)$	5	∀E
7	$Pa \supset Qb$	6	∃E
8	$[\sim Qb]\sim Pa$	7	⊃E
9	$[(\exists y)Qy](\exists x)Px \supset (\exists y)Qy$	1	C⊃E
10	$[Qo](\exists x)Px \supset (\exists y)Qy$	9	C∃E
11	$[Qb](\exists x)Px \supset (\exists y)Qy$	10	CDet
12	$[\sim Qb](\exists x)Px \supset (\exists y)Qy$	4,8	Trans
13	$(\exists x)Px \supset (\exists y)Qy$	11,12	EM

Dat de stappen van lijn 10 naar 11 en van lijnen 11 en 12 naar 13 geldig zijn, kan als volgt worden verantwoord: uit lijn 5 kunnen we eigenlijk $(\exists y)(P(\beta) \supset Qy)$ invoeren voor om het even welke $\beta \in \mathcal{C}$ en voor elk van die β kunnen we $P(\beta) \supset Q(\gamma)$ afleiden voor een $\gamma \in \mathcal{C} - (\mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_p)$. Hierdoor kan het hoofddoel worden afgeleid onder de conditie $\sim Q(\gamma)$ voor elk van deze γ. Aangezien het hoofddoel ook afleidbaar is onder de conditie Qo waarbij de dummy-constante o staat voor om het even welk element van $\mathcal{C}$, en dus ook voor elk van de γ die we eerder invoerden, is het hoofddoel afleidbaar door middel van de regel EM.

3.3 De 'Positief Deel'-relatie voor CLc

Net als in het propositioneel fragment van de klassieke logica dienen we te definiëren wanneer A een positief deel is van B, kortweg pd(A, B). Voor de bepaling van "positief deel van een gequantificeerde formule" hebben we nood aan een nieuw soort constanten. We zullen gebruik maken van de natuurlijke getallen (leden van $\mathbb{N}$) om deze aan te duiden. De moeilijkheid in het predikatieve geval bestaat erin te definiëren wanneer een formule die individuele constanten van een bepaalde soort bevat een positief deel is van een andere formule die tevens constanten van eender welke soort bevat. Daar de A in pd(A, B) lid is van een conditie van een lijn in een bewijs kan ze enkel leden van $\mathcal{C} \cup \mathcal{A}$ bevatten. De B zal een premisse zijn of een formule die reeds is afgeleid als tweede element van een lijn in het bewijs *of* een plaatsvervangende formule voor één van de vorige in de definitie voor positief deel. Daardoor kan B tevens leden van $\mathbb{N}$ bevatten.

Als $A(\beta)$ een gesloten formule is, dan is $A^*(\gamma)$ eender welke formule waarvoor het volgende geldt:

(i) $A(\beta)$ en $A^*(\gamma)$ hebben dezelfde lengte (hetzelfde aantal tekens);
(ii) $A(\beta)$ en $A^*(\gamma)$ zijn identiek, uitgezonderd van het feit dat een constante (van eender welke soort) die voorkomt in de eerste kan overeenstemmen met een constante (van eender welke soort) in de tweede; en
(iii) de reeks tekens die voorafgaat aan het eerste voorkomen van β in $A(\beta)$ is identiek aan de reeks tekens die voorafgaat aan het eerste voorkomen van γ in $A^*(\gamma)$.

Merk op dat de recursieve definitie voor de 'positief deel'-relatie in het predikatief geval enkel verwijst naar gesloten formules. Het effect van 4 en 5 moet begrepen worden in functie van 7 en 8.

1. $\mathrm{pd}(A, A)$.
2. $\mathrm{pd}(A, \mathfrak{a})$ als $\mathrm{pd}(A, \mathfrak{a}_1)$ of $\mathrm{pd}(A, \mathfrak{a}_2)$.
3. $\mathrm{pd}(A, \mathfrak{b})$ als $\mathrm{pd}(A, \mathfrak{b}_1)$ of $\mathrm{pd}(A, \mathfrak{b}_2)$.
4. wanneer $\beta \in \mathcal{C}$ en $i \in \mathbb{N}$, dan $\mathrm{pd}(A(\beta), A^*(i))$ alss $\mathrm{pd}(A(\beta), A^*(\beta))$.
5. wanneer $\beta \in \mathcal{A}$ en $\gamma \in \mathcal{C} \cup \mathbb{N}$, $\mathrm{pd}(A(\beta), A^*(\gamma))$ alss $\mathrm{pd}(A(\gamma), A^*(\gamma))$.
6. wanneer $\beta \in \mathcal{X}$ en $i \in \mathbb{N}$, dan $\mathrm{pd}(A(\beta), A^*(i))$ alss $\mathrm{pd}(A(i), A^*(i))$.
7. $\mathrm{pd}(A, (\forall\alpha)B(\alpha))$ als $\mathrm{pd}(A, B(i))$ met $i \in \mathbb{N} - \mathrm{C}(\{A, B(\alpha)\})$ (hint: kies de eerste $i \in \mathbb{N} - \mathrm{C}(\{A, B(\alpha)\})$).
8. $\mathrm{pd}(A, (\exists\alpha)B(\alpha))$ als $\mathrm{pd}(A, B(\beta))$ met $\beta \in \mathcal{C} - \mathrm{C}(\{A, B(\alpha)\})$ (hint: kies de eerste $\beta \in \mathcal{C} - \mathrm{C}(\{A, B(\alpha)\})$).
9. wanneer $\delta \in \mathbb{N} \cup \{\gamma\}$, $\mathrm{pd}(B(\gamma), \delta = \beta)$ en $\mathrm{pd}(B(\gamma), \beta = \delta)$.
10. wanneer $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{\alpha\}$, $\mathrm{pd}({\sim}\alpha = \beta, B(\gamma))$ en $\mathrm{pd}({\sim}\beta = \alpha, B(\gamma))$.

Hoofdstuk 4

Prospectieve Dynamiek in 'PCL uitgebreid met een Relevante Implicatie'

In [5] wordt de logica **PCR** voorgesteld die, in tegenstelling tot de standaard aanpak voor relevante logica's uit [1] – waar **PCL** wordt vervangen door een logica die alle paradoxen van de klassieke logica vermijdt – slechts toelaat de paradoxen van de materiële implicatie te vermijden. Dit wordt bekomen door de klassieke oordeelslogica **PCL** uit te breiden met een eerder zwakke relevante implicatie. Meer is echter niet nodig indien we er ons rekenschap van geven dat **PCR** werd ontwikkeld als logisch instrument voor het formaliseren van implicatieve zinnen uit de natuurlijke taal en dat het net de eerder vermelde paradoxen zijn die meebrengen dat **PCL** hiervoor ongeschikt is. Volgens de standaard aanpak van relevante logica's uit [1] is een logica pas relevant als ze (i) een relevante implicatie bevat en (ii) de afleidbaarheidsrelatie relevant is. Volgens het vooropgestelde doel voor de ontwikkeling van **PCR** is het echter voldoende als we in de formele taal een middel ter beschikking hebben dat ons toelaat implicaties uit de natuurlijke taal te formaliseren. Het is daarentegen niet noodzakelijk dat de afleidbaarheidsrelatie ervan – die een uitspraak is over de formele taal – ook relevant is. Dat de standaard aanpak tevens het voordeel biedt de paradoxen van de negatie te vermijden moet worden gerelativeerd. Ten eerste zorgt bijvoorbeeld het behoud van de 'Reductio'-regel ervoor dat relevante logica's niet altijd even geschikt zijn bij de behandeling van inconsistente theorieën. Ten tweede kan vanuit een pluralistische visie op logica's worden geopteerd voor de ontwikkeling van verschillende logica's die elk een specifiek probleem aanpakken. Zo kan men in het geval van inconsistente theorieën beter kiezen voor een paraconsistente logica of een inconsistentie-adaptieve logica.

Dat **PCR** een eerder zwakke implicatie toevoegt aan **PCL** hoeft niet pejoratief ingevuld te worden. Het geeft enkel aan dat werd geopteerd voor een implicatie die nooit genesteld is.[1]

Daar **PCR** een uitbreiding is van **PCL** kunnen we steunen op de resultaten uit hoofdstuk 2 voor de ontwikkeling van **PCLRc**, i.e. de bewijsprocedure voor **PCR** met prospectieve dynamiek. Ik wijs er hier reeds op dat alle regels van het regelsysteem **PCLc** van toepassing blijven in **PCLRc**. Voorafgaand aan de bewijsprocedure geef ik een korte uiteenzetting over de logica **PCR** om aan te geven hoe de betekenis van de relevante implicatie wordt vastgelegd.

4.1 De Logica PCR

In eerste instantie ga ik over tot de uitbreiding van het klassieke taalschema met een relevante implicatie. Als $\mathcal{L}$ het standaard propositioneel taalschema is dan kan $\mathcal{L}^{\rightarrow}$ als volgt worden gedefinieerd[2]:

(i) alle formules van $\mathcal{L}$ zijn formules van $\mathcal{L}^{\rightarrow}$ en
(ii) als A en B formules zijn van $\mathcal{L}$, dan is $A \rightarrow B$ een formule van $\mathcal{L}^{\rightarrow}$.
(iii) als A en B formules zijn van $\mathcal{L}$, dan is $A \leftrightarrow B$ een formule van $\mathcal{L}^{\rightarrow}$.

In de subbewijzen van de doelgerichte bewijstheorie zullen bepaalde formules worden weergegeven met een dolkje als superscript.[3] De instructies die gelden voor deze formules zijn namelijk behoorlijk verschillend van degene die van toepassing zijn op formules zonder dit superscript. De beste manier om dit technisch op een nette manier aan te pakken blijkt de introductie van het taalschema $\mathcal{L}^{\rightarrow}_{\dagger}$ gedefinieerd door:

(i) alle formules van $\mathcal{L}^{\rightarrow}$ zijn formules van $\mathcal{L}^{\rightarrow}_{\dagger}$ en
(ii) als A een formule is van $\mathcal{L}$, dan is $A^{\dagger}$ een formule van $\mathcal{L}^{\rightarrow}_{\dagger}$.

In de natuurlijke taal verwachten we bij een uitdrukking 'Als A, dan B' dat A informatie geeft over B. De afleiding van formules van de vorm $A \rightarrow B$ gebeurt in **PCR** dan ook op basis van een subbewijs waarin wordt nagegaan of een hypothese A relevant is voor het afleiden van de formule B. Dit staat in schril contrast met het afleiden van formules van de vorm $A \supset B$ in **PCL** indien gebruik wordt gemaakt van een subbewijs; zie bijvoorbeeld **PCI1** in [5]. Daar is het namelijk voldoende dat we B kunnen neerschrijven onder de hypothese A om via de 'Voorwaardelijk Bewijs'-regel VB te besluiten tot $A \supset B$. Het is in de context van de subbewijzen voor het afleiden van formules van de vorm $A \rightarrow B$

[1] In [5] wordt dit als volgt verantwoord: (i) genestelde implicaties komen slechts sporadisch voor in de natuurlijke taal en (ii) het gebruik ervan wordt beter vermeden daar onze intuïties erover duister zijn en de inferenties waarin het gebruik ervan plausibel lijkt vaak kunnen verantwoord worden door inferenties waarin de implicatie niet genesteld is. De ontwikkeling van een complexe implicatie dringt zich dan ook niet op vanuit het vooropgestelde doel.

[2] Ik baseer me hiervoor opnieuw op het klassieke taalschema **PC** uit [5].

[3] Deze methode stemt overeen met de methode met de ster uit [1] die tevens werd toegepast voor **PCR** in [5]. In wat volgt zal ik steeds gebruik maken van een dolkje.

dat beroep wordt gedaan op de methode met het dolkje. Deze wordt bij de hypothese geplaatst en bij alle afgeleide wffs waarvoor de hypothese relevant is. Op die manier kan de relevante versie van de 'Hypothese'- en de 'Voorwaardelijk Bewijs'-regel als volgt worden geformuleerd:

RHYP	Men mag een gedolkt subbewijs beginnen door een willekeurige **PC**-wff A neer te schrijven met een dolkje, *op voorwaarde* dat elk eventueel vroeger begonnen gedolkt subbewijs is afgesloten.
RVB	Uit een subbewijs dat begint met $A^\dagger$ en eindigt met $B^\dagger$ mag men besluiten tot $A \to B$.

De volgende lijst van inferentieregels geeft aan welke inferenties verzekeren dat relevantie behouden blijft, i.e. bij welke inferenties we het dolkje mogen overbrengen.

CONJ	$A^\dagger,\ B^\dagger\ /\ A\&B^\dagger$
SIM	$A\&B^\dagger/A^\dagger$ en $A\&B^\dagger/B^\dagger$
ADD	$A^\dagger/A \vee B^\dagger$ en $B^\dagger/A \vee B^\dagger$
GI	$A \supset B^\dagger, B \supset A^\dagger/A \equiv B^\dagger$
GE	$A \equiv B^\dagger/A \supset B^\dagger$ en $A \equiv B^\dagger/B \supset A^\dagger$
DN	$\sim\sim A^\dagger/A^\dagger$ en $A^\dagger/\sim\sim A^\dagger$
ICI	$A \supset B^\dagger, A \supset C^\dagger/A \supset (B\&C)^\dagger$
ICE	$A \supset (B\&C)^\dagger/A \supset B^\dagger$ en $A \supset (B\&C)^\dagger/A \supset C^\dagger$
DII	$A \supset C^\dagger, B \supset C^\dagger/(A \vee B) \supset C^\dagger$
DIE	$(A \vee B) \supset C^\dagger/A \supset C^\dagger$ en $(A \vee B) \supset C^\dagger/B \supset C^\dagger$
DPAC	$A^\dagger/B^\dagger$ (waar B door DPAC[4] uit A bekomen wordt)
DIST	$A\&(B \vee C)^\dagger/(A\&B) \vee (A\&C)^\dagger$
CPOS	$A \supset B^\dagger/*B \supset *A^\dagger$
ND	$\sim(A \vee B)^\dagger/*A^\dagger$, $\sim(A \vee B)^\dagger/*B^\dagger$ en $A^\dagger, B^\dagger/\sim(*A \vee *B)^\dagger$
NC	$\sim(A\&B)^\dagger/*A \vee *B^\dagger$ en $A \vee B^\dagger/\sim(*A\&*B)^\dagger$
NI	$\sim(A \supset B)^\dagger/A^\dagger$, $\sim(A \supset B)^\dagger/*B^\dagger$ en $A^\dagger, B^\dagger/\sim(A \supset *B)^\dagger$
NG	$\sim(A \equiv B)^\dagger/A \vee B^\dagger$, $\sim(A \equiv B)^\dagger/*A \vee *B^\dagger$ en $A \vee B^\dagger, *A \vee *B^\dagger/\sim(A \equiv B)^\dagger$

[4]Deze regel komt neer op het willekeurig veel toepassen van permutatie, associatie en contractie op een gegeven disjunctieve formule.

MI	$A \supset B^\dagger / * A \vee B^\dagger$ en $A \vee B^\dagger / * A \supset B^\dagger$

Verder zijn er nog de regels die specifiek betrekking hebben op de relevante implicatie en de relevante gelijkwaardigheid.

RMP	$A^\dagger, A \to B / B^\dagger$
RDIL	$A \vee B^\dagger, A \to C, B \to C / C^\dagger$ en $A \vee B^\dagger, A \to C / C \vee B^\dagger$ en $A \vee B^\dagger, B \to C / A \vee C^\dagger$
RRAA	$A \to B, A \to {\sim}B / {\sim}A$ (en varianten)
RTRA	$A \to B, B \to C / A \to C$
RICI	$A \to B, A \to C / A \to (B \& C)$
RICE	$A \to (B \& C) / A \to B$ en $A \to (B \& C) / A \to C$
RDII	$A \to C, B \to C / (A \vee B) \to C$
RDIE	$(A \vee B) \to C / A \to C$ en $(A \vee B) \to C / B \to C$
RMT	${\sim}B^\dagger, A \to B / {\sim}A^\dagger$ (en varianten)
RCPOS	$A \to B / {\sim}B \to {\sim}A$ (en varianten)
RM	$A \to B / A \supset B$
RGE	$A \leftrightarrow B / A \to B$ en $A \leftrightarrow B / B \to A$
RGI	$A \to B, B \to A / A \leftrightarrow B$

De afspraken die in [5] zijn vastgelegd voor de selectie van de inferenties die overdracht van relevantie garanderen, laat ik achterwege. Toch wil ik nog even verwijzen naar de specifieke interpretatie die er wordt gegeven aan 'relevant zijn voor'. Op die manier kan de lezer zich een duidelijker beeld vormen van de betekenis die aan de relevante implicatie wordt gegeven en verifiëren of de lijst van inferentieregels die overdracht van relevantie garanderen hieraan voldoet.

Met betrekking tot opvattingen kunnen we redenen hebben om ze te aanvaarden en redenen hebben om ze te verwerpen. Een belangrijke opmerking hierbij is dat we in bepaalde gevallen ofwel geen van beide soorten redenen hebben ofwel redenen hebben, zowel om ze te aanvaarden als om ze te verwerpen. De interpretatie van de logische termen in **PCR** kan dan worden vastgelegd aan de hand van de volgende clausules:

(i) $A \to B$ betekent: redenen om A te aanvaarden vormen redenen om B te aanvaarden en redenen om B te verwerpen vormen redenen om A te verwerpen.

(ii) Redenen om ${\sim}A$ te aanvaarden, respectievelijk te verwerpen, komen op hetzelfde neer als redenen om A te verwerpen, respectievelijk te aanvaarden.

4.1.1 Aandachtspunten voor de opbouw van PCLRc

Voor de ontwikkeling van een doelgerichte bewijsprocedure voor **PCR** op basis van **PCLc** is voornamelijk het volgende van belang. De betekenis die werd gegeven aan de relevante implicatie en aan 'relevant zijn voor' heeft tot gevolg dat onder andere de 'Disjunctief Syllogisme'- en de 'Reductio Ad Absurdum'-regel geen overdracht van relevantie garanderen. Dit vloeit voort uit het essentiële verschil tussen $A \rightarrow B$ enerzijds en $\sim A \vee B$ of $A \supset B$ anderzijds. De eerste drukt namelijk met zekerheid uit dat A relevant is voor B. Met andere woorden, als we redenen hebben om A te aanvaarden, dan vormen deze ook redenen om B te aanvaarden. Daar de disjunctie en de 'materiële implicatie' waarheidsfuncties zijn, is het voldoende dat ofwel B waar is ofwel A vals is opdat $\sim A \vee B$ en $A \supset B$ waar zouden zijn voor willekeurige A, respectievelijk willekeurige B. Er is dan ook geen enkele garantie op een verband tussen A en B. Voor het 'Disjunctief Syllogisme' geldt dan ook het volgende. Zelfs wanneer we zowel redenen hebben om A te verwerpen als redenen om $A \vee B$ te aanvaarden, dan hebben we nog geen redenen om B te aanvaarden daar het mogelijk is dat we tegelijk redenen hebben om A te aanvaarden en om A te verwerpen. Door het laatste hebben we namelijk redenen om $A \vee B$ te aanvaarden voor een willekeurige B.

De 'Reductio'-regel bespreek ik onmiddellijk in verband met de 'Uitgesloten Derde'-regel daar de toepassing van de 'Reductio'-, de 'Transitiviteit'- en de 'Dilemma'-regel uit het klassieke bewijsformaat worden opgevangen door UD in **PCLc** – zie 2.2.3. Geen van deze regels laat toe een dolkje over te brengen. Met betrekking tot UD kunnen we er opnieuw op wijzen dat er geen enkel verband kan worden verzekerd tussen A en B als we redenen hebben om zowel $A \supset B$ als $\sim A \supset B$ te aanvaarden; zelfs al hebben we redenen om A te aanvaarden of te verwerpen of beide. Met de relevante variant van deze regels ligt het echter anders. Zowel RDIL als RTRA zijn geldige regels in **PCR**. In het geval van RAA en UD ligt het echter anders. Voor de eerste geldt het volgende: dat redenen om A te aanvaarden ons redenen geven om zowel B als $\sim B$ te aanvaarden, geeft ons geen redenen om A te verwerpen. Over UD valt het volgende te zeggen: indien we geen redenen hebben om A te aanvaarden of te verwerpen of beide, dan hebben we ook geen redenen om B te aanvaarden daar het mogelijk is dat we noch redenen hebben om A te aanvaarden, noch om het te verwerpen.

De gevolgen van dit alles voor de opbouw van het regelsysteem **PCLRc** zal ik verduidelijken nadat ik heb uiteengezet hoe we op een doelgerichte manier op zoek kunnen gaan naar formules van de vorm $A \rightarrow B$ en hun negaties. In tegenstelling tot de 'materiële implicatie' vereist de 'relevante implicatie' een specifieke behandeling. We moeten namelijk in staat zijn om in de doelgerichte bewijzen controle te houden over het feit dat A relevant hoort te zijn voor B. Bovendien zijn het deze formules die aan de oorsprong liggen van de introductie van formules met een dolkje en de specifieke inferentieregels die hierop van toepassing zijn.

4.2 Het Regelsysteem PCLRc

In **PCLc** werd reeds gebruik gemaakt van het feit dat $A \supset B$ en $\sim A \vee B$ hetzelfde betekenen. Dit blijkt duidelijk uit de gelijke condities die we bekomen indien een conditie-analyserende regel wordt toegepast op beide formules. Dat het voldoende is om ofwel $\sim A$ ofwel B af te leiden om elk van de vorige formules te bekomen geeft ook duidelijk weer dat er geen enkel verband hoeft te bestaan tussen A en B. In tegenstelling tot de 'materiële implicatie' wordt voor de 'relevante implicatie' geen conditie-analyserende regel ingevoerd. Dit wordt in de bewijsprocedure opgevangen door de introductie van doelgerichte deelbewijzen waarbij A als relevante hypothese wordt geïntroduceerd en waarbij B als nieuw doel van ons zoekproces wordt beschouwd. Dit biedt de volgende voordelen:

(i) De basisprocedure voor de afleiding van formules van de vorm $A \rightarrow B$ wijkt in **PCLRc** nauwelijks af van de manier waarop dit gebeurt in **PCR**. Hierdoor sluit de formele beschrijving van de zoekprocedure dicht aan bij de zoekprocessen die worden gebruikt of aangeleerd bij het maken van bewijzen in **PCR**. De doelgerichte bewijzen die voortvloeien uit de toepassing van de bewijsprocedure kunnen dan ook als basis dienen voor de constructie van natuurlijke en elegante Fitch-stijl bewijzen voor **PCR**.

(ii) De introductie van B als nieuw doel van ons zoekproces zorgt ervoor dat de deelbewijzen in functie van formules van de vorm $A \rightarrow B$ doelgericht kunnen verlopen. Eenmaal een deelbewijs is gestart, wijkt de bewijsprocedure weinig af van deze die werd ontwikkeld voor **PCL**. De enige uitzonderingen vloeien voort uit de specifieke eisen die worden gesteld door de gedolkte formules. Deze wijzigingen zijn echter niet van fundamentele aard ten aanzien van het nieuwe bewijsformaat.

(iii) Het gebruik van doelgerichte deelbewijzen heeft tot gevolg dat we gemakkelijk controle kunnen houden over de relevantie van A voor het afleiden van B.

Ik zal het regelsysteem **PCLRc** in de volgende stappen aanbrengen. In eerste instantie beschrijf ik de de formule-analyserende regel voor formules van de vorm $A \rightarrow B$, gevold door de regels die instaan voor het afleiden van deze formules. Daarna introduceer ik een methode voor het doelgericht afleiden van formules van de vorm $\sim(A \rightarrow B)$. In laatste instantie bekijk ik de gevolgen van de aandachtspunten uit 4.1.1 voor de conditie- en formule-analyserende regels van **PCLc** en hoe we hieruit hun relevante tegenhangers kunnen distilleren. Na de beschrijving van het regelsysteem volgt de 'positief deel'-relatie.

4.2.1 Regels voor formules met een $\rightarrow$

Formule-Analyserende Regel voor formules van de vorm $A \rightarrow B$

Daar formules van de vorm $A \rightarrow B$ zowel een invloed hebben op de formules met een dolkje als toelaten de overeenkomstige formules van de vorm $A \supset B$ af te leiden, dienen we met beide gevallen rekening te houden in de formule-analyserende regel voor deze formules. Ik opteer in het tweede geval voor een onmiddellijke analyse van formules van de vorm $A \supset B$ in overeenstemming met de formule-analyserende regel uit **PCLc**.

$$\rightarrow\text{E} \quad \frac{[\Delta]A \rightarrow B}{[\Delta \cup \{A\}]B \qquad [\Delta \cup \{*B\}] * A \qquad [\Delta \cup \{A^\dagger\}]B^\dagger \qquad [\Delta \cup \{*B^\dagger\}] * A^\dagger}$$

In deze regel kan Δ enkel formules zonder dolkje bevatten.

Het doelgericht zoeken van formules van de vorm $A \rightarrow B$

In de bewijsprocedure wordt het wegvallen van een conditie-analyserende regel voor formules van de vorm $A \rightarrow B$ opgevangen door de instructie tot het toepassen van drie regels, de 'Hypothese'-regel Hyp†, de regel LD voor de introductie van een lokaal doel en de 'Voorwaardelijk Bewijs'- regel VB. Indien we nog geen rekening houden met toelatingsvoorwaarden en verplichtingen waaronder de toepassing van deze regels vallen, dan zien deze er als volgt uit:

Hyp† Introduceer $A^\dagger$.

LD Introduceer $[B^\dagger]B^\dagger$.

VB Als $A^\dagger$ werd geïntroduceerd door toepassing van Hyp†, $[B^\dagger]B^\dagger$ werd geïntroduceerd door toepassing van LD, en $B^\dagger$ niet-conditioneel is afgeleid, voeg dan $A \rightarrow B$ toe aan het bewijs.

In het verloop van een doelgericht bewijs kunnen natuurlijk meerdere formules van de vorm $A \rightarrow B$ als doel voorkomen. Daardoor kan verwarring ontstaan met betrekking tot de formules met een dolkje die zijn afgeleid uit verschillende hypothesen. Om dit tegen te gaan voeren we de X-markering in. Deze komt neer op het volgende: als een toepassing van Hyp† en LD leidt tot de overeenkomstige toepassing van VB, dan worden alle lijnen waarvan het tweede element een formule met een dolkje is, X-gemarkeerd in het deelbewijs; blijkt dat het lokale doel niet kan worden afgeleid met de vooropgestelde hypothese, dan worden opnieuw alle lijnen waarvan het tweede element een formule met een dolkje is X-gemarkeerd in het deelbewijs.

De specifieke structuur van het bewijsformaat kan echter leiden tot situaties waarin een deelbewijs moet gestart worden in het verloop van een ander deelbewijs. Neem het volgende voorbeeld:

$$s \supset (p \rightarrow r), (t \rightarrow p_1) \supset s, t \rightarrow q, q \rightarrow p_1, r \rightarrow u \vdash p \rightarrow u.$$

Indien we $p \rightarrow u$ trachten af te leiden aan de hand van **PCR** zonder gebruik te maken van de TRA- en RTRA-regel, dan zullen we twee subbewijzen moeten invoeren. Genestelde subbewijzen zijn namelijk niet toegelaten om het afleiden van formules met een genestelde relevante implicatie tegen te gaan. Het eerste subbewijs dient om $t \rightarrow p_1$ af te leiden uit $t \rightarrow q$ en $q \rightarrow p_1$ in functie van de afleiding van s. Eenmaal s is afgeleid kunnen we $p \rightarrow r$ afleiden, waarna een subbewijs kan worden gestart voor het afleiden van $p \rightarrow u$ uit $p \rightarrow r$ en $r \rightarrow u$.

Bekijken we echter het zoekproces dat aan de basis ligt voor de constructie van dit **PCR**-bewijs, dan moeten we vaststellen dat het eerst ingevoerde subbewijs eigenlijk in functie staat van het tweede. Om $p \rightarrow u$ af te leiden gaan we eerst op zoek naar een formule waaruit deze mogelijk kan afgeleid worden. Ontbreekt zo'n formule in de verzameling premissen Γ, dan weten we dat een subbewijs moet opgestart worden waarbij $p^\dagger$ de hypothese is en waarin we op zoek gaan naar $u^\dagger$. Om dit subbewijs tot een succesvol einde te brengen moeten we echter eerst in staat zijn om s af te leiden. Daar hiervoor een tweede subbewijs noodzakelijk is, verschuiven we dit naar de eerste plaats in het **PCR**-bewijs. In een bewijsformaat dat het zoekproces tracht te formaliseren, starten we natuurlijk onmiddellijk een deelbewijs waarin $p^\dagger$ door Hyp† wordt geïntroduceerd en waarin $u^\dagger$ als lokaal doel fungeert.

1	$[p \rightarrow u]p \rightarrow u$		Doel	R24
2	$p^\dagger$	1	Hyp†	X$^{(12)}$|24
3	$[u^\dagger]u^\dagger$	1	LD	X$^{(12)}$|24,R23
4	$r \rightarrow u$		Prem	
5	$[r^\dagger]u^\dagger$	4	$\rightarrow$E	X$^{(12)}$|24,R23
6	$s \supset (p \rightarrow r)$		Prem	
7	$[s]p \rightarrow r$	6	$\supset$E	
8	$[s, p^\dagger]r^\dagger$	7	$\rightarrow$E	R9,X$^{(12)}$|24
9	$[s]r^\dagger$	2,8	Trans†	X$^{(12)}$|24,R22
10	$(t \rightarrow p_1) \supset s$		Prem	
11	$[t \rightarrow p_1]s$	10	$\supset$E	R21
12	$t^\dagger$	11	Hyp†	X20
13	$[p_1^\dagger]p_1^\dagger$	11	LD	X20
14	$q \rightarrow p_1$		Prem	
15	$[q^\dagger]p_1^\dagger$	14	$\rightarrow$E	R19,X20
16	$t \rightarrow q$		Prem	
17	$[t^\dagger]q^\dagger$	16	$\rightarrow$E	R18,X20
18	$q^\dagger$	12,17	Trans†	X20
19	$p_1^\dagger$	15,18	Trans†	X20
20	$t \rightarrow p_1$	12,13,19	VB	
21	s	11,20	Trans†	
22	$r^\dagger$	9,21	Trans	X24

23	$u^\dagger$	5,22	Trans†	X24
24	$p \to u$	2,3,23	VB	

Eenmaal het zoekproces op stadium 11 is aanbeland, blijkt de enige optie het starten van een nieuw deelbewijs met $t^\dagger$ als relevante hypothese en $p_1^\dagger$ als nieuw lokaal doel van het zoekproces. Hoewel er geen gevaar bestaat voor het afleiden van formules waarin de relevante implicatie genesteld is, moet er wel rekening gehouden worden met het feit dat de relevante hypothese die werd ingevoerd in het eerste deelbewijs geen invloed mag hebben in het tweede deelbewijs.[5] Daar het eerste deelbewijs in dit geval nog niet werd gestopt, kunnen we hiervoor geen gebruik maken van de X-markering.

Er kan echter wel worden overgegaan tot het 'voorwaardelijk' X-markeren van de lijnen waarop een gedolkte formule voorkomt in het eerste deelbewijs indien hierin een tweede deelbewijs moet worden geopend – zie 4.3.1 voor de precieze definities. Door de toepassing van Hyp† op stadium 12 van het bewijs, worden alle lijnen van een vorig stadium in het bewijs waarop een gedolkte formule voorkomt X^{12} gemarkeerd. Op het moment dat lijn 12 zelf wordt X-gemarkeerd, vervalt de 'voorwaardelijke' X-markering van deze lijnen; hetgeen wordt aangegeven door ronde haakjes rond de 12 te plaatsen. Eenmaal het tweede deelbewijs is afgesloten, kan het zoekproces in het eerste deelbewijs worden verdergezet.

In principe kan de X-markering nog verder worden verfijnd door enkel die lijnen te markeren waarop een gedolkte formule voorkomt waarvan de afleiding afhankelijk is van de relevante hypothese. Daar dit echter een computationeel probleem is dat slechts zijn voordeel kan tonen indien het bewijs van een zekere complexiteit is, laat ik dit hier achterwege.

Wat met formules van de vorm $\sim(A \to B)$?

Voor formules van de vorm $\sim(A \to B)$ voeren we noch een formule analyserende regel, noch een conditie analyserende regel in. Als een dergelijke formule als doel voorkomt in een bewijs, dan legt de procedure de instructie op om een subbewijs te starten met als hypothese $A \to B$. De volgende hypotheseregel maakt dit mogelijk:

Hyp   Introduceer $A \to B$. Na toepassing begint een nieuw subbewijs.

Nadat Hyp is toegepast, wordt getracht een inconsistentie af te leiden. Om dit niet gespecificeerde doel te integreren in een doelgerichte context wordt de INC regel opeenvolgend toegepast op de verschillende premissen net zolang tot een inconsistentie is afgeleid:

[5] In **PCR** stelt dit probleem zich niet daar er toch geen genestelde subbewijzen zijn toegelaten en eenmaal een subbewijs is afgesloten, de erin voorkomende formules geen verdere rol mogen vervullen in het verloop van het bewijs.

INC Als $A \to B$ de hypothese is en $C \in \Gamma$, introduceer dan $[C \wedge {\sim}C]{\sim}(A \to B)$.

Na iedere toepassing van INC is er een doel en de procedure wordt voortgezet totdat het doel is afgeleid of gebleken is dat het niet afleidbaar is. In het laatste geval wordt INC toegepast op de volgende premisse. Is het doel wel afgeleid, dan wordt het subbewijs afgesloten en wordt de negatie van de hypothese afgeleid door middel van de 'Reductio' regel:

Red Als $A \to B$ de hypothese is in een subbewijs, $[C \wedge {\sim}C]{\sim}(A \to B)$ door toepassing van INC werd geïntroduceerd , en ${\sim}(A \to B)$ niet-conditioneel werd afgeleid, dan wordt het subbewijs afgesloten en wordt ${\sim}(A \to B)$ toegevoegd aan het hoofdbewijs.

De 'Reductio' regel moet worden toegepast wanneer mogelijk. Merk op dat in dit geval genestelde subbewijzen kunnen voorkomen. Telkens wanneer een premisse van de vorm ${\sim}(A \to B)$ wordt behandeld in functie van de INC-regel, zal in het subbewijs worden overgegaan tot het starten van een nieuw subbewijs door middel van de Hyp- en INC-regel. Bij genestelde subbewijzen mogen alle eerder afgeleide formules die niet voorkomen op een gemarkeerde lijn worden aangewend in het subbewijs.

Ik illustreer het gebruik van een doelgericht subbewijs aan de hand van het volgende voorbeeld: ${\sim}(p \to q), ((p \vee s) \to q) \vee r \vdash_{\mathbf{PCLRc}} r$.

1	$[r]r$		Doel	R19
2	$((p \vee s) \to q) \vee r$		Prem	
3	$[{\sim}((p \vee s) \to q)]r$	2	$\vee$E	R19
4	$\mid\ (p \vee s) \to q$	3	Hyp	
5	$\mid\ [{\sim}(p \to q) \wedge {\sim}{\sim}(p \to q)]{\sim}((p \vee s) \to q)$	3	INC	R17
6	$\mid\ [{\sim}(p \to q), {\sim}{\sim}(p \to q)]{\sim}((p \vee s) \to q)$	5	C$\wedge$E	R8
7	$\mid\ {\sim}(p \to q)$		Prem	
8	$\mid\ [{\sim}{\sim}(p \to q)]{\sim}((p \vee s) \to q)$	6,7	Trans	R17
9	$\mid\ [p \to q]{\sim}((p \vee s) \to q)$	8	C${\sim}{\sim}$E	R17
10	$\mid\ p^\dagger$	9	Hyp†	X16
11	$\mid\ [q^\dagger]q^\dagger$	9	LD	R$\bigvee$,X16
12	$\mid\ [p \vee s^\dagger]q^\dagger$	4	$\to$E	R$\bigvee$,X16
13	$\mid\ [\bigvee(\{q, p \vee s\})^\dagger]q^\dagger$	11,12	$\bigvee$I	R15,X16
14	$\mid\ [\bigvee(\{q, p, s\})^\dagger]q^\dagger$	13	C$\bigvee\vee$E	R15,X16
15	$\mid\ q^\dagger$	10,14	$\bigvee$Trans	X16
16	$\mid\ p \to q$	10,11,15	VB	
17	$\mid\ {\sim}((p \vee s) \to q)$	9,16	Trans	
18	${\sim}((p \vee s) \to q)$	4,5,17	Red	
19	r	3,18	Trans	

Voor de subbewijzen hoeft geen markering ingevoerd te worden. Indien een subbewijs wordt afgesloten aan de hand van de Red-regel of wanneer geen verdere stappen kunnen worden genomen in functie van de heuristiek, wordt ofwel het voorafgaande deelbewijs of subbewijs ofwel het hoofdbewijs verdergezet. Geen enkele formule die voorkomt in een subbewijs mag worden aangewend in het verdere verloop van het bewijs. Premissen die werden ingevoerd in het subbewijs dienen dan ook opnieuw ingevoerd te worden indien ze van nut zijn in het verder verloop van het doelgerichte bewijs.

In functie van de heuristiek verhelder ik nog even het volgende. In wat volgt noem ik een doel dat wordt ingevoerd door de INC-regel, een INC-doel.

Een subbewijs stopt 'tijdelijk' als

(i) geen verdere stappen kunnen worden ondernomen met betrekking tot de heuristiek in functie van het heersende INC-doel, en

(ii) een nieuw INC-doel kan worden ingevoerd in functie van de hypothese waarmee het subbewijs werd gestart, i.e. INC werd nog niet toegepast voor alle premissen uit Γ in functie van de heersende hypothese.

Een subbewijs stopt als het wordt afgesloten – i.e. eindigt – door toepassing van de Red-regel of wanneer geen verdere stappen kunnen worden ondernomen met betrekking tot de heuristiek in functie van de INC-doelen.

De regels die worden toegepast op stadia 13 en 15 van het bewijs zullen worden verhelderd in 4.2.3. Het nut van de R$\bigvee$-markering op lijnen 11 en 12 en de reden waarom op stadium 13 niet wordt overgegaan tot de analyse van de conditie op lijn 12 zal worden verhelderd in 4.3.

4.2.2 Het linken van formules met andere formules

In overeenstemming met **PCLc** introduceren we opnieuw een tabel waarin verschillende formules worden geassocieerd met twee andere (niet noodzakelijk verschillende) formules. Merk op dat noch formules van de vorm $A \to B$, noch hun negaties voorkomen in de kolommen voor $\mathfrak{a}$-formules en $\mathfrak{b}$-formules.

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$		$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2$
$A \wedge B$	A	B		$\sim(A \wedge B)$	$*A$	$*B$
$A \equiv B$	$A \supset B$	$B \supset A$		$\sim(A \equiv B)$	$\sim(A \supset B)$	$\sim(B \supset A)$
$\sim(A \vee B)$	$*A$	$*B$		$A \vee B$	A	B
$\sim(A \supset B)$	A	$*B$		$A \supset B$	$*A$	B
$A \leftrightarrow B$	$A \to B$	$B \to A$		$\sim(A \leftrightarrow B)$	$\sim(A \to B)$	$\sim(B \to A)$
$\sim\sim A$	A	A				

Tabel 4.1: $\mathfrak{a}$- en $\mathfrak{b}$-formules in **PCLRc**

Opnieuw zal dit toelaten de regels op een beknopte manier voor te stellen en zal het aan de basis liggen van de 'Positief Deel'-relatie. Voor **PCLRc** wordt die laatste behandeld na het beschrijven van de regels daar ze sterk afhankelijk is van hun specifieke formulering.

4.2.3 Analyserende- en Aanvullende regels voor formules met of zonder dolkje

Voor het onderscheid tussen de inferentieregels die gelden voor de gedolkte en niet-gedolkte formules vertrek ik van de aandachtspunten uit 4.1.1. Het mag reeds duidelijk zijn dat formules met een dolkje namelijk niet op eenzelfde manier geanalyseerd kunnen worden als de overeenkomstige formules zonder een dolkje. Daar de 'Disjunctief Syllogisme'-regel geen overdracht van relevantie garandeert, moet de analyse van de $\mathfrak{b}$-formules gewijzigd worden. Meer specifiek betreft het de formule-analyserende regel die hier voor problemen zorgt. De meest voor de hand liggende oplossing bestaat in de introductie van formules van de vorm $\bigvee(\{A_1, \ldots, A_n\})$. Deze formules vormen een afkorting voor continue disjuncties in dewelke de volgorde van de disjuncten onbepaald is en die equivalent zijn met elke welgevormde formule die van hen kan worden bekomen door het herordenen van de disjuncten en het invoegen van haakjes. Verder merk ik op dat elke $A_i (1 \leq i \leq n)$ slechts eenmaal voorkomt in $\bigvee(\{A_1, \ldots, A_n\})$.

Structurele Regels

De structurele regels Doel en Prem voor de introductie van het hoofddoel en de premissen worden overgenomen uit de bewijsprocedure **PCLc** – zie 2.2.3.

Analyserende- en Aanvullende Regels voor formules zonder dolkje

Net zoals de regels van **PC** blijven gelden in **PCR**, zo ook blijven de regels van **PCLc** gelden in **PCLRc**. Meer bepaald staan zij in voor de inferenties die gelden voor formules zonder dolkje. De formule-, conditie- en aanvullende regels kunnen dan ook integraal worden overgenomen uit 2.2.3.

Formule-Analyserende Regels voor formules met dolkje

We dienen op te merken dat de regels voor formules met een dolkje een complicatie met zich meebrengen daar we rekening moeten houden met de mogelijke aanwezigheid van $\mathfrak{a}$-formules en $\mathfrak{b}$-formules in formules van de vorm $\bigvee(\Delta)$. De formule- en conditie analyserende regels voor formules met een dolkje bevatten dan ook regels voor formules en tevens regels voor subformules van disjuncties.

$$\frac{[\Delta]\mathfrak{a}^\dagger}{[\Delta]\mathfrak{a}_1{}^\dagger \quad [\Delta]\mathfrak{a}_2{}^\dagger} \qquad \frac{[\Delta]\mathfrak{b}^\dagger}{[\Delta]\bigvee(\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}^\dagger)}$$

$$\frac{[\Delta]\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{a}\})^\dagger}{[\Delta]\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{a}_1\})^\dagger \quad [\Delta]\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{a}_2\})^\dagger} \qquad \frac{[\Delta]\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{b}\})^\dagger}{[\Delta]\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}^\dagger)}$$

Conditie-Analyserende Regels voor formules met dolkje

Niettegenstaande het feit dat de problemen betreffende de analyse van $\mathfrak{b}$-formules zich voordoet op het niveau van de formule-analyserende regels, voeren we een gelijkaardige analyse door wanneer dergelijk formules voorkomen in een conditie. Opnieuw moeten we rekening houden met de mogelijke aanwezigheid van $\mathfrak{a}$-formules en $\mathfrak{b}$-formules in formules van de vorm $\bigvee(\Delta)$.

$$\frac{[\Delta \cup \{\mathfrak{a}^\dagger\}]A}{[\Delta \cup \{{\mathfrak{a}_1}^\dagger, {\mathfrak{a}_2}^\dagger\}]A} \qquad \frac{[\Delta \cup \{\mathfrak{b}^\dagger\}]A}{[\Delta \cup \{\bigvee(\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\})^\dagger\}]A}$$

$$\frac{[\Delta \cup \{\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{a}\})^\dagger\}]A}{[\Delta \cup \{\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{a}_1\})^\dagger, \bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{a}_2\})^\dagger\}]A} \qquad \frac{[\Delta \cup \{\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{b}\})^\dagger]A}{[\Delta \cup \{\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\})^\dagger\}]A}$$

Vanaf nu identificeren we A met $\bigvee(\{A\})$. Dit heeft tot gevolg dat de twee bovenste formule- en conditie-analyserende regels speciale gevallen zijn van de twee die eronder worden weergegeven.

Aanvullende regels voor formules met dolkje

In het teken van wat ik opmerkte in 4.1.1, moet met het volgende rekening worden gehouden voor de aanvullende regels betreffende **PCLRc**. Vooreerst is er geen overdracht van relevantie bij toepassing van de regels RAA en UD. De relevante variant van RAA uit **PCR** wordt opgevangen door de formule-analyserende regel voor formules van de vorm $A \to B$. Zo bieden de formules $A \to B$ en $A \to {\sim}B$ de mogelijkheid tot het afleiden van respectievelijk $[{\sim}B]{\sim}A$ en $[B]{\sim}A$ door middel van $\to$E, waarna kan besloten worden tot ${\sim}A$ aan de hand van UD. Eenzelfde redenering kan worden gevolgd voor de relevante variant van UD.

Met het wegvallen van de UD-regel – die geen overdracht van relevantie garandeert – en de gewijzigde analyse van $\mathfrak{b}$-formules, dient natuurlijk een alternatief te worden gevonden voor de relevante versies van de 'Transitiviteit'- en 'Dilemma'-regel uit het klassieke bewijsformaat. Daar we gebruik maken van subbewijzen voor het afleiden van formules van de vorm $A \to B$, kan de eerste gemakkelijk worden opgevangen door de gedolkte variant van de Trans-regel uit **PCLc**:

$$\text{Trans}^\dagger \quad \frac{\begin{array}{c}[\Delta \cup \{B^\dagger\}]A \\ [\Delta']B^\dagger\end{array}}{[\Delta \cup \Delta']A}$$

Door de gewijzigde analyse van de $\mathfrak{b}$-formules hebben we nood aan ten minste twee nieuwe regels. De eerste regel komt neer op een Trans-regel voor formules van de vorm $\bigvee(\Delta)$. Wanneer een formule A afleidbaar is onder de conditie $\bigvee(\Delta)$, dan is het voldoende dat we $\bigvee(\Delta')$ met $\Delta' \subseteq \Delta$ kunnen afleiden om A niet-conditioneel af te leiden. De algemene vorm van deze regel ziet er als volgt uit:

$$\bigvee\text{Trans}\quad \frac{\begin{array}{l}[\Theta \cup \{\bigvee(\Delta \cup \Delta')^\dagger\}]A \\ [\Theta']\bigvee(\Delta)^\dagger\end{array}}{[\Theta \cup \Theta']A}$$

Stel dat we een bewijs zoeken voor het volgende: $s \to (p \vee q), p \to r, q \to r \vdash_{\mathbf{PCLRc}} s \to r$. Het is duidelijk dat we hiervoor nood hebben aan de regel RDIL in een **PCR**-bewijs. In **PCLRc** leidt dit tot de volgende situatie:

1	$[s \to r]s \to r$		Doel
2	$s^\dagger$	1	Hyp†
3	$[r^\dagger]r^\dagger$	1	LD
4	$p \to r$		Prem
5	$[p^\dagger]r^\dagger$	4	$\to$E
6	$s \to (p \vee q)$		Prem
7	$[s^\dagger]p \vee q^\dagger$	6	$\to$E
8	$p \vee q^\dagger$	2,7	Trans†
9	$\bigvee(\{p, q\})^\dagger$	8	$\vee$E
10	$q \to r$		Prem
11	$[q^\dagger]r^\dagger$	10	$\to$E

Om dit bewijs te kunnen afsluiten hebben we nood aan een constructieve regel die toelaat om $[\bigvee(\{p, q\})^\dagger]r^\dagger$ af te leiden op basis van de formules die werden afgeleid op de lijnen 5 en 11. In de volgende regel geldt: $\Delta_i^\dagger = \{A^\dagger \mid A \in \Delta_i\}$. Met andere woorden, de regel kan enkel worden toegepast indien alle leden van alle Δ_i formules met een dolkje zijn.

$$\bigvee\text{I}\quad \frac{\begin{array}{l}[\Delta_1^\dagger]A^\dagger \\ \ldots \\ [\Delta_n^\dagger]A^\dagger\end{array}}{[f^\dagger(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)]A^\dagger}$$

De conclusie van deze regel wordt als volgt gedefinieerd:

$$f^\dagger(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) =_{df} \{\bigvee(A_1, \ldots, A_n)^\dagger | A_1 \in \Delta_1, \ldots, A_n \in \Delta_n\}.$$

We moeten hierbij rekening houden met het geval waarbij een of meerdere $A_i (1 \leq i \leq n)$ formules van de vorm $\bigvee(\Phi)^\dagger$ zijn.

$$\mathrm{C}\bigvee \quad \frac{[\Delta^\dagger \cup \{\bigvee(\Theta \cup \{\bigvee(\Phi)\})^\dagger\}]A^\dagger}{[\Delta^\dagger \cup \{\bigvee(\Theta \cup \Phi)^\dagger\}]A^\dagger}$$

Ik voer nog een extra regel in waarvan ik nog niet kon aantonen dat hij afleidbaar is uit de vorige. Daar ik een voorkeur geef aan de eerder vermelde aanvullende regels en ik niet zeker ben of deze regel al dan niet noodzakelijk is, zal deze slechts een secundaire rol vertolken in de heuristiek voor **PCLRc**. Blijkt de regel onnodig in de procedure, dan zal hij enkel in het geval een lokaal doel niet afleidbaar is voor overtollige stappen zorgen.

$$\mathrm{Trans}\bigvee \quad \frac{\begin{array}{l}[\Delta]\bigvee(\Theta \cup \Theta')^\dagger \\ [\Delta' \cup \{\bigvee(\Theta')^\dagger\}]\bigvee(\Phi)^\dagger\end{array}}{[\Delta \cup \Delta']\bigvee(\Theta \cup \Phi)^\dagger}$$

De regel blijkt bijvoorbeeld toepasbaar in het volgende bewijs: $p \to (q \vee r), q \to (s \vee t) \vdash p \to (r \vee (s \vee t))$

1	$[p \to (r \vee (s \vee t))]p \to (r \vee (s \vee t))$		Doel	R13
2	$p^\dagger$	1	Hyp†	X13
3	$[r \vee (s \vee t)^\dagger]r \vee (s \vee t)^\dagger$	1	LD	R12,X13
4	$[\bigvee(\{r, s \vee t\})^\dagger]r \vee (s \vee t)^\dagger$	3	C$\vee^\dagger$E	R12,X13
5	$p \to (q \vee r)$		Prem	
6	$[p^\dagger]q \vee r^\dagger$	5	$\to$E	X13
7	$q \vee r^\dagger$	2,6	Trans†	X13
8	$\bigvee(\{q, r\})^\dagger$	7	$\vee$E	X13
9	$q \to (s \vee t)$		Prem	
10	$[q^\dagger]s \vee t^\dagger$	9	$\to$E	X13
11	$\bigvee(\{r, s \vee t\})^\dagger$	8,10	Trans$\bigvee$	X13
12	$r \vee (s \vee t)^\dagger$	4,11	Trans†	X13
13	$p \to (r \vee (s \vee t))$	2,3,12	VB	

Merk echter op dat na lijn 10 ook het volgende mogelijk is:

11	$[q^\dagger]r \vee (s \vee t)^\dagger$	4,10	$\bigvee$Trans	R$\bigvee$,X15
12	$[\bigvee(\{\bigvee(\{r, s \vee t\}), q\})^\dagger]r \vee (s \vee t)^\dagger$	4,11	$\bigvee$I	R14,X15
13	$[\bigvee(\{r, s \vee t, q\})^\dagger]r \vee (s \vee t)^\dagger$	12	C$\bigvee$	R14,X15
14	$r \vee (s \vee t)^\dagger$	8,13	$\bigvee$Trans	R14,X15
15	$p \to (r \vee (s \vee t))$	2,3,14	VB	

Of het gebruik van Trans$\bigvee$ in sommige gevallen een computationeel voordeel kan bieden doet niet onmiddellijk ter zake. Ik verkies in dit geval een eenduidige bewijsprocedure uit te werken die later kan aangevuld worden met regels die in specifiek te bepalen gevallen voor een computationeel voordeel zorgen.

4.2.4 De 'Positief Deel'-relatie voor PCLRc

In voorbereiding voor het specificeren van de 'positief deel'- relatie definiëren we eerst de verzameling δ_A voor elke (gesloten) formule A:

(i) $\{A\} \in \delta_A$
(ii) Als $\Delta \cup \{\mathfrak{a}\} \in \delta_A$, dan $\Delta \cup \{\mathfrak{a}_1\} - \{\mathfrak{a}\}, \Delta \cup \{\mathfrak{a}_2\} - \{\mathfrak{a}\} \in \delta_A$.
(iii) Als $\Delta \cup \{\mathfrak{b}\} \in \delta_A$, dan $\Delta \cup \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} - \{\mathfrak{b}\} \in \delta_A$.

Om $\delta_{\bigvee(\Theta)}$ te definiëren, vervangen we eerst $\bigvee(\Theta)$ door elke welgevormde formule waarmee ze equivalent is – deze wordt bekomen door het plaatsen van haakjes in een continue disjunctie van de leden van Θ. Naast het feit dat $\delta_A \vdash_{\mathbf{CL}} A$ op evidente wijze geldt, bekomen we tevens $A \vdash_{\mathbf{CL}} \bigvee(\Delta)$ voor alle $\Delta \in \delta_A$.

Delen (ii) en (iii) van de definitie zorgen ervoor dat geanalyseerde formules worden verwijderd uit de leden van δ_A. Neem als voorbeeld $\{r, p \wedge q\} \in \delta_A$, dan $\{r, p\}, \{r, q\} \in \delta_A$ terwijl $\{r, p \wedge q, p\}, \{r, p \wedge q, q\}, \{r, p, q\} \notin \delta_A$.

Dat A een 'positief deel' is van een andere formule is recursief gedefinieerd door de volgende clausules:

1. $\text{pd}(A, A)$.
2. $\text{pd}(A, \mathfrak{a})$ als $\text{pd}(A, \mathfrak{a}_1)$ of $\text{pd}(A, \mathfrak{a}_2)$.
3. $\text{pd}(A, \mathfrak{b})$ als $\text{pd}(A, \mathfrak{b}_1)$ of $\text{pd}(A, \mathfrak{b}_2)$.
4. Als $\text{pd}(A, B)$ en $\text{pd}(B, C)$, dan $\text{pd}(A, C)$.
5. $\text{pd}(B^{(\dagger)}, A \to B)$.
6. $\text{pd}(*A^{(\dagger)}, A \to B)$.
7. Als $A \in \Delta \in \delta_B$, dan $\text{pd}(A^\dagger, B^\dagger)$.
8. Als $\text{pd}(A^\dagger, B^\dagger)$, dan $\text{pd}(\bigvee(\Delta \cup \{A\})^\dagger, B^\dagger)$
9. Als $\text{pd}(B^\dagger, A^{(\dagger)})$ en $\text{pd}(A^{(\dagger)}, C)$, dan $\text{pd}(B^\dagger, C)$.

Het dolkje tussen haakjes in clausules 5, 6 en 9 wijst erop dat de uitdrukking zowel geldt met als zonder dolkje – in clausule 9 moeten beide A's wel of niet vergezeld zijn van een dolkje. De formule B in clausules 7-9 mag een formule van de vorm $\bigvee(\Theta)$ zijn. Elk van de volgende kan gemakkelijk worden afgeleid:

10. Als $\text{pd}(A^\dagger, B^\dagger)$ en $\text{pd}(B^\dagger, C^\dagger)$, dan $\text{pd}(A^\dagger, C^\dagger)$.
11. Als $\Delta \cap \Theta \neq \emptyset$ en $\Theta \in \delta_A$, dan $\text{pd}(\bigvee(\Delta)^\dagger, A^\dagger)$.

4.3 Een Bewijsheuristiek voor PCLRc

De heuristiek die ik uitwerk voor **PCLRc** is sterk gebaseerd op de basisheuristiek voor **PCLc** – zie 2.3.3. Ook hier kunnen verschillende varianten worden uitgewerkt, waaronder een versie volgens het 'diepte eerst'-principe of een versie in het teken van zichtbare zoekpaden. Het is echter voldoende om hier enkel een basisheuristiek uit te werken waarop de principes die werden voorgesteld in 2.3.3 kunnen worden toegepast. Eenmaal de bewijsheuristiek is uitgewerkt beschouwen we een **PCLRc**-bewijs als een bewijs dat wordt bekomen door de toepassing van de regels uit het regelsysteem **PCLRc** volgens de instructies van de bewijsheuristiek.

4.3.1 De Markeringsdefinities

Net als voor **PCLc** ga ik eerst over tot het beschrijven van de markeringsdefinities. De eerste twee definities kunnen worden overgenomen uit de bewijsprocedure **PCLc**, namelijk de R- en O-markering uit 2.3.2. We moeten enkel rekening houden met het feit dat A ook een gedolkte formule kan zijn en dat de condities in het laatste geval zowel formules met als formules zonder dolkje kunnen bevatten. Het is evident dat beide A's in de definities ofwel gedolkt ofwel niet-gedolkt moeten zijn.

In functie van de R-markering en de heuristiek voer ik de notie 'niveau' van een **PCLRc**-bewijs in. Na de introductie van het hoofddoel door de Doel-regel, bevindt een **PCLRc**-bewijs zich op niveau 1. Telkens een nieuw doel wordt ingevoerd door de LD-regel of de INC-regel, stijgt het niveau van het **PCLRc**-bewijs met één eenheid. De lijnen die werden ingevoerd vóór de introductie van een 'lokaal doel' of INC-doel blijven op het vorige niveau hangen. Wordt een deelbewijs of subbewijs gestopt, dan zakt het niveau met één eenheid, en wordt gezocht naar het doel op het vorige niveau. Dit betekent dat het niveau van een **PCLRc**-bewijs steeds met één eenheid daalt bij de toepassing van de VB- of de Red-regel.

Definitie 7 *Een lijn i waarop $[\Delta]A^{(\dagger)}$ is afgeleid, is R-gemarkeerd op een stadium van het bewijs als op dat stadium $[\Delta']A^{(\dagger)}$ is afgeleid op lijn j en $\Delta' \subset \Delta$, op voorwaarde dat lijn i niet voorkomt op een lager 'niveau' dan lijn j in het bewijs en lijn j niet X-gemarkeerd is of voorkomt in een subbewijs dat is gestopt.*

De voorwaarden die bij de R-markering zijn toegevoegd moeten ervoor zorgen dat deze enkel wordt doorgevoerd op het 'niveau' waarop het bewijs zich op een bepaald stadium bevindt. Stel bijvoorbeeld dat $[B]A$ is afgeleid op lijn i op 'niveau' 1 van een bewijs en dat op een hoger 'niveau' B niet-conditioneel wordt afgeleid. In dit geval kan A niet niet-conditioneel worden afgeleid op niveau 1, waardoor lijn i niet R-gemarkeerd mag worden.

Definitie 8 *Een lijn i waarop $[\Delta]A^{(\dagger)}$ is afgeleid, is O-gemarkeerd als $A^{(\dagger)} \in \Delta$, tenzij lijn i werd geïntroduceerd door middel van de Doel- of LD-regel.*

De I-markering uit **PCLc** kent geen relevante tegenhanger. Ze blijft natuurlijk wel werkzaam op het vlak van formules zonder dolkje. De reden hiervoor is dat we voor een opvatting zowel redenen kunnen hebben om ze te aanvaarden als om ze te verwerpen. Nemen we even het volgende voorbeeld in beschouwing: $p \to q, r \to \sim q, (q \wedge \sim q) \to s \vdash_{\mathbf{PCLRc}} (p \wedge r) \to s$. Indien we een relevante variant van de I-markering zouden invoeren, dan zou de lijn met $[q^\dagger, \sim q^\dagger]s^\dagger$ I-gemarkeerd worden, niettegenstaande het feit dat $(p \wedge r) \to s$ wel degelijk afleidbaar is uit de gegeven premissen.

De volgende twee markeringsdefinities hebben enkel betrekking op formules met een dolkje, namelijk de X- en de 'voorwaardelijke' X-markering – zie 4.2.1.

Voor hun bepaling specificeer ik eerst de notie deelbewijs. Een deelbewijs start door de toepassing van de Hyp†- en de LD-regel en stopt als het deelbewijs eindigt – i.e. door de toepassing van de VB-regel in functie van de eerder gestelde hypothese en het lokale doel, of als er geen verdere stappen kunnen worden gezet met betrekking tot de heuristiek in functie van het gestelde lokale doel.

Definitie 9 *Een lijn i waarvan het tweede element een formule met dolkje is, is X-gemarkeerd alss*

(i) *een deelbewijs stopt op lijn j,*
(ii) *$i < j$, en*
(iii) *lijn i niet 'voorwaardelijk' X- of reeds X-gemarkeerd is.*

De X-markering bestaat uit het toevoegen van een X gevolgd door het lijnnummer waarop het deelbewijs werd gestopt in het vijfde element van een X-gemarkeerde lijn.

Definitie 10 *Een lijn i waarvan het tweede element een formule met dolkje is, is 'voorwaardelijk' X-gemarkeerd alss*

(i) *een deelbewijs start door toepassing van Hyp† op lijn j,*
(ii) *lijn j niet X-gemarkeerd is,*
(iii) *$i < j$, en*
(iv) *lijn i niet X- of reeds 'voorwaardelijk' X-gemarkeerd is.*

De 'voorwaardelijke' X-markering bestaat uit het toevoegen van een X met het lijnnummer waarop de relevante hypothese werd ingevoerd in superscript, in het vijfde element van een X-gemarkeerde lijn. Wordt de relevante hypothese zelf X-gemarkeerd, dan worden alle 'voorwaardelijk' X-gemarkeerde lijnen gedemarkeerd door het lijnnummer tussen ronde haakjes te plaatsen.

Ik merk verder op dat X- of 'voorwaardelijk' X-gemarkeerde lijnen mogen herhaald worden in het bewijs indien ze van nut zijn en opnieuw kunnen worden afgeleid in het verder verloop van het zoekproces; zelfs al werden ze reeds R-gemarkeerd.

De laatste markeringsdefinitie staat in het teken van de regel $\bigvee$I en is eigenlijk een variant van de R-markering. We bekijken hiervoor opnieuw het voorbeeld dat werd uitgewerkt in 4.2.1 betreffende formules van de vorm $\sim(A \to B)$. Door de toepassing van $\bigvee$I op stadium 13 en de conditie die we bekomen op lijn 14 houden we niet alleen rekening met het feit dat $q^\dagger$ kan worden afgeleid indien een van de volgende afleidbaar is, i.e. $q^\dagger, p \vee s^\dagger, p^\dagger$ en $s^\dagger$, maar tevens met de disjuncties die kunnen worden gevormd uit de eerste twee of de eerste in combinatie met de tweede en de derde met het oog op de toepassing van RDIL. Eenmaal de condities van lijnen 11 en 12 zijn opgenomen in een toepassing van $\bigvee$I hoeven we dan ook geen rekening meer met ze te houden.

Definitie 11 *Een lijn i is $R\bigvee$-gemarkeerd als haar tweede element werd aangewend in een toepassing van de $\bigvee$I-regel.*

4.3.2 De Bewijsheuristiek

De basisheuristiek voor **PCLRc** wordt opnieuw geleid door de verzameling Σ_j, waarbij $A \in \Sigma_j$ als en alleen als A lid is van een conditie van een niet-gemarkeerde lijn op stadium j. De instructies om een bewijs voor $\Gamma \vdash_{\mathbf{PCLRc}} G$ neer te schrijven worden gebonden aan vijf restricties die hun formulering minder complex maakt.

R1 Formule-analyserende regels worden niet toegepast op formules geïntroduceerd door de Doel- of de Lokaal Doel-regel.

R2 Geen enkele regel wordt aangewend om de formule op een gemarkeerde of niet-gemarkeerde lijn te herhalen, met uitzondering van:

- (i) X- en 'voorwaardelijk' X-gemarkeerde lijnen en toepassingen van Hyp†, tenzij hierdoor een deelbewijs wordt herhaald,
- (ii) lijnen die voorkomen in een subbewijs dat is gestopt, tenzij hierdoor een subbewijs wordt herhaald in het hoofdbewijs of in eenzelfde deelbewijs.

R3 Geen enkele regel wordt toegepast op een gemarkeerde lijn of een lijn die voorkomt in een gestopt subbewijs.

R4 Pas de heuristiek steeds toe in functie van de doelen die voorkomen op het hoogste 'niveau' van het **PCLRc**-bewijs.

R5 In een deelbewijs en een subbewijs mogen enkel de instructies met een dolkje worden toegepast.

Voor het nut van deze restricties verwijs ik in eerste instantie naar 2.3.2. Bij de eerste restrictie hoef ik niet te verwijzen naar de formules geïntroduceerd door de INC-regel, daar er geen formule-analyserende regel is ingevoerd voor formules van de vorm $\sim(A \to B)$.

De uitbreiding van de tweede restrictie heeft natuurlijk te maken met de te sterke filtering die we doorvoeren met betrekking tot de formules met een dolkje wanneer een deelbewijs stopt. Verder moet ervoor gezorgd worden dat een specifieke combinatie van een relevante hypothese met een Lokaal Doel niet wordt herhaald indien het ermee samenhangende deelbewijs reeds werd gestopt maar niet beëindigd was. In het geval van 'voorwaardelijke' X-markering vermijden we beter het openen van eenzelfde deelbewijs daar dit aanleiding geeft tot een circulair zoekproces. Daar geen enkele lijn die voorkomt in een gestopt subbewijs mag worden aangewend in het verder verloop van het bewijs, moeten we toelaten dat deze opnieuw kunnen worden neergeschreven indien ze opnieuw afleidbaar zijn. We moeten er echter voor zorgen dat een bepaald subbewijs niet wordt herhaald in het hoofdbewijs of in een en hetzelfde deelbewijs. Toch moeten we toelaten dat het in verschillende deelbewijzen kan worden herhaald indien dit noodzakelijk blijkt.

Voor de derde restrictie verwijs ik naar 2.3.2 en 4.3.1. Daar ik geen markering voorzie voor gestopte subbewijzen, voer ik hier tevens een restrictie in op het gebruik van lijnen in een subbewijs.

De vierde restrictie staat in functie van het overzichtelijk uitvoeren van de deelbewijzen en subbewijzen en tevens in functie van het X- en 'voorwaardelijk' X-markeren van lijnen. Het is de bedoeling dat de heuristiek in eerste instantie wordt uitgevoerd met het oog op het afleiden van het hoofddoel. Blijkt er in het zoekproces nood aan het opstarten van een deelbewijs of subbewijs, dan wordt de heuristiek uitgevoerd in functie van het lokaal doel of het doel ingevoerd door de INC-regel. Wordt een subbewijs afgesloten of stopt een deelbewijs, dan voeren we de heuristiek uit in functie van het vorige lokale doel of het vorige INC-doel. Op een bepaald 'niveau' van het **PCLRc**-bewijs kunnen we steeds formules gebruiken die werden afgeleid op een lager 'niveau', tenzij deze zijn gemarkeerd. Eenmaal we terugkeren naar een lager 'niveau', dan zijn de formules uit het vorige 'niveau' niet langer toepasselijk in het bewijs daar ze ofwel voorkomen in een gestopt subbewijs of X-gemarkeerd zijn. Voor alle duidelijkheid wijs ik er nogmaals op dat indien lijn i werd geïntroduceerd door toepassing van de VB- of de Red-regel, lijn i zich op 'niveau' $n-1$ bevindt als lijn $i-1$ zich op niveau n bevindt.

Ik merk verder op dat de EFQ-regel niet wordt toegepast binnen een deelbewijs of een subbewijs, hetgeen wordt verzekerd door de vijfde restrictie.

De instructies zijn weergegeven in volgorde van toepassing. Indien een instructie kan worden uitgevoerd, wordt een lijn toegevoegd aan het bewijs en keren we terug naar I1. Indien dit niet het geval is, gaan we door naar de volgende instructie.

I0	Introduceer $[G]G$ door middel van de Doel-regel.
I1†	Leid G niet-conditioneel af met om het even welke regel.
I2†	Leid het Lokaal Doel of het INC-doel niet-conditioneel af met om het even welke regel.
I3†	Pas VB of Red toe.
I4†	Pas UD of UD0 toe indien dit aanleiding geeft tot het R-markeren van een lijn.

I5† Pas Trans$^{(\dagger)}$ of $\bigvee$Trans toe indien dit aanleiding geeft tot het R-markeren van een lijn.

I6† Pas een formule-analyserende regel toe om $[\Delta]A^{(\dagger)}$ te bekomen op een lijn i, op voorwaarde dat $B^{(\dagger)} \in \Sigma_{i-1}$ een positief deel is van $A^{(\dagger)}$.

I7† Pas Prem toe om A te bekomen op een lijn i, op voorwaarde dat $B^{(\dagger)} \in \Sigma_{i-1}$ een positief deel is van A.

I8† Pas C$\bigvee$ toe.

I9† Pas $\bigvee$I toe.

I10† Pas een conditie-analyserende regel toe; is het doel van de vorm:

(i) $A \rightarrow B$, pas dan achtereenvolgens Hyp† en LD toe.
(ii) $\sim(A \rightarrow B)$, pas dan achtereenvolgens Hyp en INC toe.

I11† Pas UD toe om G of het Lokaal Doel of het INC-doel op een conditie Δ te bekomen, op voorwaarde dat Δ niet zichtbaar inconsistent is.

I12† Pas Trans$^{(\dagger)}$ of $\bigvee$Trans toe om G of het Lokaal Doel of het INC-doel op een conditie Δ te bekomen (voor een Δ), op voorwaarde dat Δ niet zichtbaar inconsistent is.

I13† Pas Trans$\bigvee$ toe.

I14† Als een subbewijs 'tijdelijk' stopt, pas dan INC toe.

I15 Pas EFQ toe.

Enkele toelichtingen kunnen hierbij van nut zijn. De eerste instructie dient opnieuw voor de introductie van het hoofddoel. Ik beperk me hier net als voor **PCLc** tot een enkel hoofddoel per zoekproces. Voor instructie I1† verwijs ik naar 2.3.3. Met I2† voer ik een gelijkaardige instructie in met betrekking tot deelbewijzen en subbewijzen. De vierde instructie zorgt ervoor dat ten allen tijde wordt overgegaan tot het stoppen van een deelbewijs of afsluiten van een subbewijs indien de mogelijkheid zich hiervoor aandient. Instructies I4†-I7† behouden hun functie zoals voorgesteld in de basisheuristiek voor **PCLc**. Bij I5† wordt tevens rekening gehouden met de gedolkte versie van de Trans-regel en de Trans regel $\bigvee$Trans voor formules van de vorm $\bigvee(\Delta)$. Ook voor I6† houden we natuurlijk rekening met gedolkte doelen. Indien B een formule met een dolkje is, kan A zowel een formule met als zonder dolkje zijn. Is B een formule zonder dolkje, dan kan A enkel een formule zonder dolkje zijn. Daar premissen nooit formules met een dolkje kunnen zijn, dienen we er bij I7† enkel rekening mee te houden dat B een formule met een dolkje kan zijn. De plaats van instructies I8† en I9† kan worden verantwoord door de commentaar die ik reeds gaf in 4.3.1 aangaande de toepassing van de regel $\bigvee$I. Voor de instructie betreffende de conditie-analyserende regels moeten we rekening houden met het feit dat voor formules van de vorm $A \rightarrow B$ en $\sim(A \rightarrow B)$ alternatieve regels zijn ingevoerd. Deelbewijzen en subbewijzen worden dan ook enkel opgestart indien geen van de vorige instructies kon worden toegepast in functie van het hoofddoel. Ik merk hier verder bij op dat de aanvullingen die in de eerdere instructies in verband staan met formules met een dolkje en de instructies I2†, I3†, I8† en I9† slechts van toepassing zijn indien I10† reeds werd uitgevoerd in het teken van formules van de vorm $A \rightarrow B$ en $\sim(A \rightarrow B)$. De instructies I11† en I12† vormen een uitbreiding van instructies I7 en I8 uit de basisheuristiek voor **PCLc**. Hun positie in de heuristiek kan opnieuw worden verantwoord vanuit deze die zij bekleden voor **PCLc**. De uitbreiding zorgt ervoor dat we de instructies tevens toepassen in deelbewijzen en subbewijzen en dat we ook rekening houden met de Trans-regels die van toepassing zijn op formules met een dolkje. Instructie I13† en de plaats die zij bekleedt in de heuristiek kan worden verantwoord door de opmerkingen die ik gaf bij de regel Trans$\bigvee$ in 4.2.3. Indien we in een subbewijs geen verdere stappen kunnen ondernemen met betrekking tot de instructies I1†-I13† in functie van het heersende INC-doel, dan zorgt I14† voor de introductie van een nieuw INC-doel als hiervoor nog premissen ter beschikking zijn. Instructie I15 wordt pas uitgevoerd indien geen enkele van de vorige instructies kan worden toegepast in het hoofdbewijs. Hiermee bekleedt deze regel dezelfde functie als in de basisheuristiek voor **PCLc**.

Net als voor de basisheuristiek voor **PCLc** moeten we rekening houden met het geval waarbij Γ oneindig is. Niet alleen met betrekking tot de toepassing van EFQ, maar tevens met het oog op het stoppen van deelbewijzen of subbewijzen. Ik neem hiervoor de oplossing over die werd voorgesteld in 2.3.3, i.e. restrictie vier waarin gebruik wordt gemaakt van een limietreeks uit Γ.

Hoofdstuk 5

Prospectieve Dynamiek in IPC

In dit hoofdstuk beschrijf ik een doelgerichte bewijsprocedure voor de intuïtionistische oordeelslogica **IPC** uit [5]. Ik baseer me hiervoor op de karakterisering van **IPC** die gebruik maakt van de propositionele constante $\perp$. De centrale reden hiervoor is het wegvallen van 'Uitgesloten Derde' ($A \vee \sim A$) als stelling in **IPC**. Net als voor de ontwikkeling van **PCLRc** levert dit namelijk problemen op voor de behandeling van de regels RAA, DIL en TRA die wel geldig zijn in **IPC**. De oplossingen die ik hiervoor ontwikkelde in het regelsysteem **PCLRc** zullen ook hier van nut zijn. Daar de relevante versie van RAA echter kon gereduceerd worden tot de klassieke situatie in **PCLRc**, moeten we op zoek gaan naar een elegante manier – die niet steunt op 'Uitgesloten Derde' – om deze regel op te vangen. De formulering van **IPC** met gebruik van $\perp$ blijkt hiervoor zeer handig.

5.1 De Logica IPC

De intuïtionistische oordeelslogica **IPC** kan gekarakteriseerd worden aan de hand van de structurele regels en de basisinferentieregels van **PCI1** uit [5] – zie bijlage C – met weglating van de regel DN en toevoeging van de inferentieregel $A, \sim A/B$.

Indien we het standaard propositioneel taalschema uitbreiden met de propositionele constante $\perp$, dan kan de negatie worden weggewerkt aan de hand van de volgende definitie: $\sim A =_{df} A \supset \perp$. In dit geval dienen zowel DN als RAA verwijderd te worden uit de basisinferentieregels van **PCI1** en moet de volgende regel worden toegevoegd:

$\perp$ $\quad\quad\quad$ $\perp /A$

5.2 Het Regelsysteem IPCLc

Als we ons in eerste instantie baseren op het regelsysteem **PCLc** voor de ontwikkeling van **IPCLc**, dan stuiten we op een aantal problemen. Zoals eerder vermeld is er het wegvallen van 'Uitgesloten Derde' als stelling in **IPC**, waardoor we niet verder kunnen steunen op de regel UD, die een toch wel centrale rol vervult in **PCLc**. Daar RAA echter een geldige inferentieregel is in **IPC**, blijkt de introductie van een subbewijs met het oog op de afleiding van een contradictie de enige plausibele oplossing. Dit is tevens in overeenstemming met de betekenis die we geven aan $\sim A$ in het intuïtionisme – i.e. het feit dat A weerlegd is doordat er een tegenstrijdigheid uit afgeleid is. Hierbij dient zich echter het probleem aan dat het zoeken naar een inconsistentie in een doelgericht bewijs minder evident is dan het lijkt, we weten namelijk niet op voorhand welke formule zich precies inconsistent gedraagt. Zelfs na de analyse van de premissen aan de hand van de formule- en conditie-analyserende formules is het niet altijd even gemakkelijk deze te achterhalen.

Als de introductie van een subbewijs met het oog op de afleiding van een inconsistentie al een oplossing mag bieden voor RAA, dan doet ze dit niet in het geval van de inferentieregels TRA en DIL. Doordat de regel DN niet geldt in **IPC** kunnen we niet overgaan tot het starten van een subbewijs waarbij we voor TRA op zoek gaan naar het afleiden van een inconsistentie uit $\sim(A \supset C)$ en in het geval van DIL uit $\sim C$.

Indien we ons baseren op **PCLRc** en op de karakterisering van **IPC** die gebruik maakt van $\perp$, blijkt alles heel wat eenvoudiger te verlopen.

In eerste instantie baseer ik mij op de behandeling van formules van de vorm $A \rightarrow B$ voor de formulering van een alternatieve versie van de conditie-analyserende regel C$\supset$E uit **PCLc**. Komt een formule van de vorm $A \supset B$ voor in een conditie, dan gaan we over tot de toepassing van de regels Hyp en LD, waardoor een subbewijs wordt opgestart met A als hypothese en B als lokaal doel. De regel VB laat toe het hierdoor gestarte subbewijs af te sluiten met de afleiding van $A \supset B$.

Hyp	Introduceer A. Hierdoor start een nieuw subbewijs.
LD	Introduceer $[B]B$.
VB	Als A werd geïntroduceerd door toepassing van Hyp, $[B]B$ werd geïntroduceerd door toepassing van LD, en B niet-conditioneel is afgeleid, voeg dan $A \rightarrow B$ toe aan het bewijs en sluit het subbewijs af.

In combinatie met de eliminatie van de negatie aan de hand van de definitie $\sim A =_{df} A \supset\perp$ krijgen we het volgende resultaat indien we op zoek gaan naar een formule van de vorm $\sim A$: de zoektocht naar $A \supset\perp$ wordt omgezet in een subbewijs waarin A als hypothese fungeert en waarin $\perp$ het lokale doel is.

Bekijken we dit even in de context van een toepassing van de regel RAA, dan bekomen we in dit geval het volgende resultaat:

$p \supset q, p \supset (q \supset \bot) \vdash_{\mathbf{IPCLc}} p \supset \bot$

1	$[p \supset \bot] p \supset \bot$		Doel	R12
2	p	1	Hyp	
3	$[\bot]\ \bot$	1	LD	R11
4	$p \supset (q \supset \bot)$		Prem	
5	$[p] q \supset \bot$	4	$\supset$E	R6
6	$q \supset \bot$	2,5	Trans	
7	$[q]\ \bot$	6	$\supset$E	R11
8	$p \supset q$		Prem	
9	$[p] q$	8	$\supset$E	R10
10	q	2,9	Trans	
11	$\bot$	7,10	Trans	
12	$p \supset \bot$	2,3,11	VB	

Afgezien van de introductie van een subbewijs voor de afleiding van een formule van de vorm $A \supset B$ en het wegwerken van de negatie, bevat dit bewijs enkel toepassingen van regels die we reeds kennen uit **PCLc**.

De voorgestelde oplossing laat tevens toe de **IPC** stelling $\sim\sim(p \vee \sim p)$ op een elegante manier af te leiden, niettegenstaande het feit dat $(p \vee \sim p)$ er geen stelling van is.

1	$[((p \vee (p \supset \bot)) \supset \bot) \supset \bot]((p \vee (p \supset \bot)) \supset \bot) \supset \bot$		Doel	R12
2	$(p \vee (p \supset \bot)) \supset \bot$	1	Hyp	
3	$[\bot]\ \bot$	1	LD	R11
4	$[p \vee (p \supset \bot)]\ \bot$	2	$\supset$E	R11
5	$[p]\ \bot$	4	C$\vee$E	R11
6	$[p \supset \bot]\ \bot$	4	C$\vee$E	R11
7	p	6	Hyp	
8	$[\bot]\ \bot$	6	LD	R9
9	$\bot$	5,7	Trans	
10	$p \supset \bot$	7,8,9	VB	
11	$\bot$	6,10	Trans	
12	$((p \vee (p \supset \bot)) \supset \bot) \supset \bot$	2,3,11	VB	

Het is duidelijk dat het gebruik van de subbewijzen tevens een oplossing biedt voor de regel TRA. Wat DIL betreft kunnen we dan weer beroep doen op het regelsysteem **PCLRc**. Hiervoor introduceren we opnieuw formules van de vorm $\bigvee(\{A_1, \ldots, A_n\})$ – zie 4.2.3. Denken we hierbij aan de niet-gedolkte varianten van de regels $\bigvee$I en $\vee^\dagger$E – zie 4.2.3 – dan verloopt het bewijs voor $p \vee q, p \supset r, q \supset r \vdash_{\mathbf{IPCLc}} r$ als volgt:

1	$[r]r$		Doel	R$\bigvee$,R9
2	$p \supset r$		Prem	
3	$[p]r$	2	$\supset$E	R$\bigvee$,R9
4	$q \supset r$		Prem	
5	$[q]r$	4	$\supset$E	R$\bigvee$,R9
6	$p \vee q$		Prem	
7	$\bigvee(\{p, q\})$	6	$\vee$E	
8	$[\bigvee(\{p, q, r\})]r$	1,3,5	$\bigvee$I	R9
9	r	7,8	$\bigvee$Trans	

Bij de formule-analyserende regel voor formules van de vorm $A \supset B$ beperk ik mij tot een eenzijdige analyse, in die zin dat we enkel kunnen overgaan tot de afleiding van B onder de conditie A. Hetzelfde geldt voor formules van de vorm $A \vee B$, waar enkel $\bigvee(\{A, B\})$ het resultaat kan zijn van de toepassing van de regel $\vee$E. Hoewel een analyse in de zin van **PCLc** – die in het geval van $\supset$E zou neerkomen op het afleiden van $A \supset\perp$ onder de conditie $B \supset\perp$ – in sommige gevallen een klein voordeel kan bieden, wens ik deze achterwege te laten. De reden hiervoor is dat een dergelijke analyse van $\mathfrak{b}$-formules de gevallen waarin TRA, DIL of RAA van toepassing zijn opnieuw zou uitwerken in de richting van 'Uitgesloten Derde'.

5.2.1 Linken van formules met andere formules

Door het wegwerken van de negatie kan de tabel voor het linken van formules met andere formules behoorlijk ingeperkt worden. Toch behouden we deze tabel voor een beknopte weergave van de formule- en conditie-analyserende regels.

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_2$
$A \wedge B$	A	B	$A \vee B$	A	B	$A \supset B$	A	B
$A \equiv B$	$A \supset B$	$B \supset A$						

Tabel 5.1: $\mathfrak{a}$-, $\mathfrak{b}$-, en $\mathfrak{c}$-formules in **IPCLc**

5.2.2 De Analyserende- en Aanvullende regels voor IPCLc

Formule-Analyserende Regels

$$\frac{[\Delta]\mathfrak{a}}{[\Delta]\mathfrak{a}_1 \quad [\Delta]\mathfrak{a}_2} \qquad \frac{[\Delta]\mathfrak{b}}{[\Delta]\bigvee(\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\})}$$

$$\frac{[\Delta]\mathfrak{c}}{[\Delta \cup \{\mathfrak{c}_1\}]\mathfrak{c}_2}$$

$$\frac{[\Delta]\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{a}\})}{[\Delta]\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{a}_1\}) \quad [\Delta]\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{a}_2\})} \qquad \frac{[\Delta]\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{b}\})}{[\Delta]\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\})}$$

Conditie-Analyserende Regels

$$\frac{[\Delta \cup \{\mathfrak{a}\}]A}{[\Delta \cup \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}]A} \qquad \frac{[\Delta \cup \{\mathfrak{b}\}]A}{[\Delta \cup \{\mathfrak{b}_1\}]A \quad [\Delta \cup \{\mathfrak{b}_2\}]A}$$

$$\frac{[\Delta \cup \{\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{a}\})\}]A}{[\Delta \cup \{\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{a}_1\}), \bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{a}_2\})\}]A} \qquad \frac{[\Delta \cup \{\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{b}\})]A}{[\Delta \cup \{\bigvee(\Theta \cup \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\})\}]A}$$

Beide onderste conditie-analyserende regels worden ingevoerd met het oog op de toepassing van de regel $\bigvee$I. Daar deze regel wordt toegepast vóór de conditie-analyserende regels in de heuristiek, hebben we nood aan regels die toelaten complexe formules te analyseren indien ze voorkomen in een formule van de vorm $\bigvee(\Delta)$. Merk op dat er geen variant van deze regels is ingevoerd voor formules van de vorm $A \supset B$. Ook als een formule van de vorm $\bigvee(\Delta \cup \{A \supset B\})$ voorkomt in een conditie, zal worden overgegaan tot het starten van een subbewijs.

Aanvullende Regels

Voor een volledige beschrijving van **IPCLc** herhaal ik nogmaals de volgende aanvullende regels: de regel Trans die zowel voorkomt in elk van de reeds beschreven regelsystemen en de regels $\bigvee$Trans, $\bigvee$I en C$\bigvee$ die als niet-gedolkte varianten uit **PCLRc** worden overgenomen.

$$\text{Trans} \quad \frac{\begin{array}{l}[\Delta \cup \{B\}]A \\ [\Delta']B\end{array}}{[\Delta \cup \Delta']A}$$

$$\bigvee\text{Trans} \quad \frac{\begin{array}{l}[\Theta \cup \{\bigvee(\Delta \cup \Delta')\}]A \\ [\Theta']\bigvee(\Delta)\end{array}}{[\Theta \cup \Theta']A}$$

$$\bigvee\text{I} \quad \frac{\begin{array}{l}[\Delta_1]A \\ \ldots \\ [\Delta_n]A\end{array}}{[f(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)]A}$$

met $f(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) =_{df} \{\bigvee(A_1, \ldots, A_n) | A_1 \in \Delta_1, \ldots, A_n \in \Delta_n\}$

$$\mathrm{C}\bigvee \ \frac{[\Delta \cup \{\bigvee(\Theta \cup \{\bigvee(\Phi)\})\}]A}{[\Delta \cup \{\bigvee(\Theta \cup \Phi)\}]A}$$

Indien we echter een bewijs willen uitwerken voor $s \supset\perp, r \vee s, (r \supset\perp) \vee u \vdash_{\mathbf{IPCLc}} u$, dan schieten de reeds beschreven regels tekort.

1	$[u]u$		Doel
2	$(r \supset\perp) \vee u$		Prem
3	$\bigvee(\{r \supset\perp, u\})$	2	$\vee$E

Voor dit geval helpt de volgende redenering ons een stap vooruit: als we $r \supset\perp$ als hypothese nemen en u als lokaal doel, en we slagen erin het aldus geopende subbewijs af te sluiten door de afleiding van $(r \supset\perp) \supset u$, dan weten we dat u afleidbaar is door $u \supset u$ en de formule afgeleid op lijn 3.

In algemene termen kunnen we dan ook de volgende regels invoeren. De regels voor het starten van het subbewijs voorzie ik voor alle duidelijkheid van de voorwaarde waaraan hun introductie gebonden is in de heuristiek.

Als $[\bigvee(\Delta' \cup \{B\})]A$ en $\bigvee(\Delta \cup \{B\})$ zijn afgeleid in een bewijs, dan mag een subbewijs worden gestart door de successieve toepassing van de Hyp$^{\vee}$- en LD$^{\vee}$-regel:

Hyp$^{\vee}$ Introduceer $\bigvee(\Delta)$. Hierdoor start een nieuw subbewijs.

LD$^{\vee}$ Introduceer $[\bigvee(\Delta' \cup \{B\})] \bigvee(\Delta' \cup \{B\})$.

VB$^{\vee}$ Als $\bigvee(\Delta)$ werd geïntroduceerd door toepassing van Hyp$^{\vee}$, $[\bigvee(\Delta' \cup \{B\})] \bigvee(\Delta' \cup \{B\})$ werd geïntroduceerd door toepassing van LD$^{\vee}$, en $\bigvee(\Delta' \cup \{B\})$ niet-conditioneel is afgeleid, voeg dan $\bigvee(\Delta) \supset \bigvee(\Delta' \cup \{B\})$ toe aan het bewijs en sluit het subbewijs af.

$$\bigvee\mathrm{DIL} \ \frac{\begin{array}{l}\bigvee(\Delta) \supset \bigvee(\Delta' \cup \{B\}) \\ \bigvee(\Delta \cup \{B\})\end{array}}{\bigvee(\Delta' \cup \{B\})}$$

Het bewijs voor $s \supset\perp, r \vee s, (r \supset\perp) \vee u \vdash_{\mathbf{IPCLc}} u$ kan dan als volgt verder worden uitgewerkt:

1	$[u]u$		Doel	R$\bigvee$,R18
2	$(r \supset\perp) \vee u$		Prem	
3	$\bigvee(\{r \supset\perp, u\})$	2	$\vee$E	
4	$\mid\ r \supset\perp$	1,3	Hyp$^{\vee}$	
5	$\mid\ [u]u$	1,3	LD$^{\vee}$	R14
6	$\mid\ [\perp]u$		$\perp$	R14

7	$[r] \perp$	4	$\supset$E	R$\bigvee$,R13
8	$s \supset \perp$		Prem	
9	$[s] \perp$	8	$\supset$E	R$\bigvee$,R13
10	$r \vee s$		Prem	
11	$\bigvee(\{r, s\})$	10	$\vee$E	
12	$[\bigvee(\{r, s\})] \perp$	7,9	$\bigvee$I	R13
13	$\perp$	11,12	Trans	
14	u	6,13	Trans	
15	$(r \supset \perp) \supset u$	4,5,14	VB$^{\vee}$	
16	$[r \supset \perp]u$	15	$\supset$E	R$\bigvee$,R18
17	$[\bigvee(\{r \supset \perp, u\})]u$	1,16	$\bigvee$I	R18
18	u	3,17	Trans	

De regel $\perp$ die wordt toegepast op lijn 6 is de doelgerichte variant van de gelijknamige regel die werd gebruikt voor de karakterisering van **IPC** met gebruik van $\perp$. Aangezien er zich na stadium 5 geen verdere opties aanbieden voor het afleiden van u, gaan we op zoek naar $\perp$.

$$\perp \; \frac{[A]A}{[\perp]A}$$

5.2.3 De 'Positief Deel'-relatie

Voor de 'positief deel'-relatie definieer ik opnieuw de verzameling δ_A voor elke (gesloten) formule A – zie tevens 4.2.4:

(i) $\{A\} \in \delta_A$
(ii) Als $\Delta \cup \{\mathfrak{a}\} \in \delta_A$, dan $\Delta \cup \{\mathfrak{a}_1\} - \{\mathfrak{a}\}, \Delta \cup \{\mathfrak{a}_2\} - \{\mathfrak{a}\} \in \delta_A$.
(iii) Als $\Delta \cup \{\mathfrak{b}\} \in \delta_A$, dan $\Delta \cup \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} - \{\mathfrak{b}\} \in \delta_A$.

Dat A een 'positive part' is van een andere formule kan vervolgens recursief gedefinieerd worden door de volgende clausules:

1. pd(A, A).
2. pd$(A, \mathfrak{a})$ als pd$(A, \mathfrak{a}_1)$ of pd$(A, \mathfrak{a}_2)$.
3. pd$(A, \mathfrak{b})$ als pd$(A, \mathfrak{b}_1)$ of pd$(A, \mathfrak{b}_2)$.
4. pd$(A, \mathfrak{c})$ als pd$(A, \mathfrak{c}_2)$.
5. Als $A \in \Delta \in \delta_B$, dan pd$(A, B)$.
6. Als pd(A, B), dan pd$(\bigvee(\Delta \cup \{A\}), B)$
7. Als pd(A, B) en pd(B, C), dan pd(A, C).

5.3 Een Bewijsheuristiek voor IPCLc

De heuristiek voor **IPCLc** is sterk verwant met de heuristiek voor **PCLRc** en daardoor tevens gebaseerd op de basisheuristiek voor **PCLc**. Opnieuw beperk ik mij tot de uitwerking van een basisheuristiek waaruit verdere varianten kunnen worden afgeleid. Na de uitwerking van de heuristiek verstaan we onder een **IPCLc**-bewijs een bewijs dat resulteert uit de toepassing van het regelsysteem **IPCLc** volgens de instructies van de heuristiek.

5.3.1 De Markeringsdefinities

Door de aanwezigheid van subbewijzen in de doelgerichte bewijsprocedure voor **IPC** introduceer ik opnieuw de notie 'niveau' in functie van de markeringsdefinities en de heuristiek – zie 4.3.1. Een **IPCLc** bevindt zich op 'niveau' 1 na de introductie van het hoofddoel. Telkens een nieuw doel wordt geïntroduceerd door de LD- of LD$^\vee$-regel stijgt het niveau met één eenheid. De lijnen die worden neergeschreven op een bepaald niveau blijven steeds op dit niveau hangen. Het niveau daalt pas indien het subbewijs op het hoogste niveau wordt gestopt. Voor alle duidelijkheid merk ik nogmaals op dat een hoofdbewijs of subbewijs stopt indien het eindigt – i.e. als het hoofddoel niet-conditioneel kan worden afgeleid of een subbewijs kan worden afgesloten door toepassing van VB of VB$^\vee$ – of als er geen verdere stappen kunnen worden gezet met betrekking tot de heuristiek in functie van het hoofddoel of het lokale doel en de doelen die hieruit voortvloeien.

Definitie 12 *Een lijn i waarop $[\Delta]A^{(\dagger)}$ is afgeleid, is R-gemarkeerd op een stadium van het bewijs als op dat stadium $[\Delta']A^{(\dagger)}$ is afgeleid op lijn j en $\Delta' \subset \Delta$, op voorwaarde dat lijn i niet voorkomt op een lager 'niveau' dan lijn j in het bewijs en lijn j niet voorkomt in een subbewijs dat is gestopt.*

Definitie 13 *Een lijn i waarop $[\Delta]A^{(\dagger)}$ is afgeleid, is O-gemarkeerd als $A^{(\dagger)} \in \Delta$, tenzij lijn i werd geïntroduceerd door middel van de Doel-, LD-, of LD$^\vee$-regel.*

In tegenstelling tot **PCLRc** kent **IPCLc** wel een variant van de I-markering uit **PCLc**. Indien een conditie zowel een formule van de vorm $A \supset\perp$ als de formule A bevat, dan heeft het geen zin deze verder op te nemen in het zoekproces met het oog op de eventueel latere toepassing van de regel $\perp$.

Definitie 14 *Een lijn i waarop $[\Delta \cup \{B, B \supset\perp\}]A$ is afgeleid, is I-gemarkeerd.*

In functie van de regel $\bigvee$I voer ik opnieuw de R$\bigvee$-markering in:

Definitie 15 *Een lijn i is R$\bigvee$-gemarkeerd als haar tweede element werd aangewend in een toepassing van de $\bigvee$I-regel.*

5.3.2 De Restricties en Instructies van de Heuristiek

De basisheuristiek voor **IPCLc** wordt net als de vorige basisheuristieken geleid door de verzameling Σ_j, waarbij $A \in \Sigma_j$ als en alleen als A lid is van een conditie van een niet-gemarkeerde lijn op stadium j. De instructies om een bewijs voor $\Gamma \vdash_{\mathbf{IPCLc}} G$ neer te schrijven worden gebonden aan vier restricties die hun formulering minder complex maakt.

R1 Formule-analyserende regels worden niet toegepast op formules geïntroduceerd door de Doel-, de LD-, of de LD$^\vee$-regel.

R2 Geen enkele regel wordt aangewend om de formule op een gemarkeerde of niet-gemarkeerde lijn te herhalen, met uitzondering van:

- (i) lijnen die voorkomen in een subbewijs dat is gestopt, tenzij hierdoor een subbewijs wordt herhaald op eenzelfde niveau, en
- (ii) lijnen geïntroduceerd door de Doel-regel, de Hyp- en LD-regel of de Hyp†- en LD†-regel, tenzij hierdoor een subbewijs wordt herhaald dat nog niet is gestopt.

R3 Geen enkele regel wordt toegepast op een gemarkeerde lijn of een lijn die voorkomt in een gestopt subbewijs.

R4 Pas de heuristiek steeds toe in functie van de doelen die voorkomen op het hoogste 'niveau' van het **IPCLc**-bewijs.

De instructies zijn weergegeven in volgorde van toepassing. Indien een instructie kan worden uitgevoerd, wordt een lijn toegevoegd aan het bewijs en keren we terug naar I1. Indien dit niet het geval is, gaan we door naar de volgende instructie. In de heuristiek verwijst 'lokaal doel' zowel naar doelen geïntroduceerd door de LD-regel als naar doelen ingevoerd door de LD$^\vee$-regel.

I0 Introduceer $[G]G$ door middel van de Doel-regel.

I1 Leid G niet-conditioneel af met om het even welke regel.

I2 Leid het Lokaal Doel niet-conditioneel af met om het even welke regel.

I3 Pas VB of VB$^\vee$ toe.

I4 Pas $\bigvee$DIL toe.

I5 Pas Trans of $\bigvee$Trans toe indien dit aanleiding geeft tot het R-markeren van een lijn.

I6 Pas een formule-analyserende regel toe om $[\Delta]A$ te bekomen op een lijn i, op voorwaarde dat $B \in \Sigma_{i-1}$ een positief deel is van A.

I7 Pas Prem toe om A te bekomen op een lijn i, op voorwaarde dat $B \in \Sigma_{i-1}$ een positief deel is van A.

I8 Pas C$\bigvee$ toe.

I9 Pas $\bigvee$I toe.

I10 Als $[\bigvee(\Delta' \cup \{B\})]A$ en $\bigvee(\Delta \cup \{B\})$ zijn afgeleid in een bewijs, pas dan achtereenvolgens Hyp$^\vee$ en LD$^\vee$ toe.

I11 Pas een conditie-analyserende regel toe; is het doel van de vorm:

(i) $A \supset B$, pas dan achtereenvolgens Hyp en LD toe.

I12 Pas Trans of $\bigvee$Trans toe om G of het Lokaal Doel of het INC-doel op een conditie Δ te bekomen (voor een Δ), op voorwaarde dat $\{A, A \supset\perp\} \nsubseteq \Delta$.

I13 Pas $\perp$ toe.

Merk op dat de regel $\perp$ ervoor zorgt dat EFQ hier niet als een geïsoleerd gegeven kan worden beschouwd. Het is dan ook niet nodig om bij oneindige Γ over te gaan tot de introductie van een limietreeks uit Γ met het oog op 'Ex Falso Quodlibet'. Toch kan de introductie ervan nuttig zijn om het nodeloos rekken van subbewijzen te vermijden en het bewijs alsnog in de breedte uit te werken.

Voor de verantwoording van de plaats die de verschillende regels in de heuristiek krijgen, verwijs ik naar 4.3.2. In het merendeel van de gevallen kan een gelijkaardige redenering worden gevolgd als voor **PCLRc**. De plaats van instructie 10 vloeit voort uit de beperkte analyse van disjunctieve formules. Hierdoor komt de nadruk sterk te liggen op indirecte toepassingen van 'Dilemma'. Het is dan ook belangrijk om deze op te sporen indien de elementen van een doel genesteld zijn in formules van de vorm $\bigvee(\Delta)$. Om dit ietwat aanschouwelijker te maken, introduceer ik nog even het volgende voorbeeld, waarvan ik de uitwerking verschuif naar de volgende bladzijde om de overzichtelijkheid te bewaren:

$$((p \supset s) \vee q) \vee r, s \supset\perp, (p \supset\perp) \supset t, q \supset t, u \supset t, (r \supset\perp) \vee u \vdash_{\mathbf{IPCLc}} t$$

1	$[t]t$		Doel	R38
2	$(p \supset \bot) \supset t$		Prem	
3	$[p \supset \bot]t$	2	$\supset$E	R$\bigvee$,R38
4	$q \supset t$		Prem	
5	$[q]t$	4	$\supset$E	R$\bigvee$,R38
6	$u \supset t$		Prem	
7	$[u]t$	6	$\supset$E	R$\bigvee$,R38
8	$((p \supset s) \vee q) \vee r$		Prem	
9	$\bigvee(\{(p \supset s) \vee q, r\})$	8	$\vee$E	
10	$\bigvee(\{p \supset s, q, r\})$	9	$\bigvee\vee$E	
11	$(r \supset \bot) \vee u$		Prem	
12	$\bigvee(\{r \supset \bot, u\})$	11	$\vee$E	
13	$[\bigvee(\{p \supset \bot, q, u, t\})]t$	1,3,5,7	$\bigvee$I	R38
14	$\mid\; \bigvee(\{p \supset s, r\})$	10,13	Hyp$^{\vee}$	
15	$\mid\; [\bigvee(\{p \supset \bot, q, u, t\})] \bigvee(\{p \supset \bot, q, u, t\})$	10,13	LD$^{\vee}$	
16	$\mid\;\mid\; r \supset \bot$	12,15	Hyp$^{\vee}$	
17	$\mid\;\mid\; [\bigvee(\{p \supset \bot, q, u, t\})] \bigvee(\{p \supset \bot, q, u, t\})$	12,15	LD$^{\vee}$	R33
18	$\mid\;\mid\;\mid\; p$	17	Hyp	
19	$\mid\;\mid\;\mid\; [\bot]\,\bot$	17	LD	R31
20	$\mid\;\mid\;\mid\; [r]\,\bot$	16	$\supset$E	R$\bigvee$,R31
21	$\mid\;\mid\;\mid\; s \supset \bot$		Prem	
22	$\mid\;\mid\;\mid\; [s]\,\bot$	21	$\supset$E	R$\bigvee$,R31
23	$\mid\;\mid\;\mid\; [\bigvee(\{r, s\})]\,\bot$	20,22	$\bigvee$I	R31
24	$\mid\;\mid\;\mid\;\mid\; p \supset s$	14,23	Hyp$^{\vee}$	
25	$\mid\;\mid\;\mid\;\mid\; [\bigvee(\{r, s\})] \bigvee(\{r, s\})$	14,23	LD$^{\vee}$	R28
26	$\mid\;\mid\;\mid\;\mid\; [p]s$	24	$\supset$E	R27
27	$\mid\;\mid\;\mid\;\mid\; s$	18,26	Trans	
28	$\mid\;\mid\;\mid\;\mid\; \bigvee(\{r, s\})$	25,27	$\bigvee$Trans	
29	$\mid\;\mid\;\mid\; (p \supset s) \supset \bigvee(\{r, s\})$	24,25,28	VB$^{\vee}$	
30	$\mid\;\mid\;\mid\; \bigvee(\{r, s\})$	14,29	$\bigvee$DIL	
31	$\mid\;\mid\;\mid\; \bot$	23,30	Trans	
32	$\mid\;\mid\; p \supset \bot$	18,19,31	VB	
33	$\mid\;\mid\; \bigvee(\{p \supset \bot, q, u, t\})$	17,32	$\bigvee$Trans	
34	$\mid\; (r \supset \bot) \supset \bigvee(\{p \supset \bot, q, u, t\})$	16,17,33	VB$^{\vee}$	
35	$\mid\; \bigvee(\{p \supset \bot, q, u, t\})$	12,34	$\bigvee$DIL	
36	$\bigvee(\{p \supset s, r\}) \supset \bigvee(\{p \supset \bot, q, u, t\})$	14,35	VB$^{\vee}$	
37	$\bigvee(\{p \supset \bot, q, u, t\})$	10,36	$\bigvee$DIL	
38	t	13,37	Trans	

Hoofdstuk 6

Besluit en verder onderzoek

In dit werk heb ik voor elk van de volgende logica's een doelgerichte bewijsprocedure uitgewerkt: de klassieke oordeelslogica (**PCLc**), de klassieke oordeelslogica uitgebreid met een relevante implicatie (**PCLRc**) en de intuïtionistische oordeelslogica (**IPCLc**). Daarnaast is ook het regelsysteem **CLc** voorgesteld dat als basis kan dienen voor een doelgerichte bewijsprocedure voor de volledige klassieke logica. In bijlage A is tevens een alternatief hiervoor opgenomen onder de vorm van een 'work in progress'-nota (in samenwerking met Diderik Batens en Peter Verdée). Aan de basis van de verschillende regelsystemen ligt een nieuw ontwikkeld bewijsformaat dat steunt op een aantal technieken die fundamenteel zijn voor de dynamische bewijzen uit het adaptief logica programma. Dit bewijsformaat is bijzonder in die zin dat het toelaat de redeneerprocessen, die impliciet aanwezig zijn bij het maken van een formeel bewijs, te implementeren in de bewijzen zelf. Het laat tevens toe op een eenvoudige manier bewijsheuristieken te ontwikkelen die van pedagogische waarde kunnen zijn. De regelsystemen en heuristieken die hun oorsprong vinden in het nieuwe bewijsformaat vloeien probleemloos samen in bewijsprocedures die toelaten op een efficiënte manier doelgerichte bewijzen te construeren.

Een eerste richting voor verder onderzoek is natuurlijk het uitwerken van een heuristiek voor **CLc**. Eenmaal dit in orde is kan gewerkt worden aan het volledigheidsbewijs.

De resultaten met betrekking tot prospectieve dynamiek in modale logica's heb ik niet opgenomen daar dit onderzoek nog in een pril stadium verkeert.

Om de pedagogische waarde van deze bewijsprocedures te verzilveren dient echter verder onderzoek te gebeuren naar de Fitch-stijl reconstructie van de doelgerichte bewijzen. Een aanzet hiervoor is terug te vinden in [37]. Ik laat deze procedure echter achterwege omdat ze vanuit een verkeerde invalshoek is opgebouwd en daardoor nodeloos complex is. De fout die ik toen heb gemaakt is een reconstructie te willen maken aan de hand van de basisinferentieregels uit [5]. Op dit moment ben ik de mening toegedaan dat de selectie van de

Fitch-stijl regels moet gebeuren op basis van de regels die zijn opgenomen in de bewijsprocedure. Anderzijds blijkt het ook aangewezen het regelsysteem van de bewijsprocedure zo aan te passen dat tegemoet wordt gekomen aan de reconstructie van een aantal centrale regels uit de Fitch-stijl bewijzen. Het blijkt bijvoorbeeld aangewezen om in **PCLc** het zoekproces naar formules van de vorm $A \supset B$ volgens doelgerichte subbewijzen te laten verlopen. Hiervoor kan gesteund worden op de subbewijzen die reeds werden ingevoerd in **PCLRc** en **IPCLc**. Daarnaast moet ook onderzocht worden hoe we de toepassingen van RAA en DIL van elkaar kunnen onderscheiden. Zelfs als er gebruik wordt gemaakt van doelgerichte subbewijzen, kunnen deze niet altijd onderscheiden worden, aangezien ze beide onder de EM-regel vallen. Het is mogelijk dat hierbij kan gesteund worden op de resultaten uit [36]. Enige voorzichtigheid is hier echter geboden. De resultaten die hier door Portoraro worden voorgesteld steunen namelijk op de principes die schuil gaan achter een computerprogramma voor het aanleren van Fitch-stijl bewijzen. De procedures die hij heeft uitgewerkt richten zich dan ook op het simultaan genereren van verschillende bewijzen zodat steeds hints kunnen worden gegeven aan de student die een bewijs maakt, welke aanpak hij of zij ook volgt.

Verdere aandacht kan uitgaan naar de vergelijking tussen de bewijsprocedures volgens het nieuwe bewijsformaat en alternatieve aanpakken voor de constructie van doelgerichte bewijzen. Een belangrijke kandidaat hiervoor is het werk van Gabbay en Olivetti – zie [26]. Ook hier is het echter twijfelachtig of er belangrijke inzichten uit kunnen voortvloeien. Hun aanpak tracht namelijk de brug te slaan tussen 'natuurlijke' inferentiesystemen en resolutie. Bovendien is van de uitwerking van afzonderlijke heuristieken en de intergratie van zoekstappen in de bewijzen helemaal geen sprake. De 'Socratic Proofs' van Wiśniewski – zie [41] en [42] – die in zekere zin zijn gebaseerd op het werk van Gabbay en Olivetti, zijn in dit opzicht nog minder interessant, daar er zelfs geen sprake is van doelgerichtheid.

Een laatste richting voor verder onderzoek is verbonden met de resultaten die ik heb opgenomen in bijlage B. Daarin is een directe bewijstheorie uitgewerkt voor 'klassieke compatibiliteit' die volledig opereert in de taal van de 'klassieke logica'; dit in tegenstelling tot het resultaat uit [20]. In het laatste wordt een indirecte karakterisering uitgewerkt aan de hand van een modale vertaling van de premissen en de conclusie en aan de hand van een modale logica die is gebaseerd op **S5**. Het enige nadeel van deze karakterisering is het feit dat ze door de modale vertaling tekort schiet in de explicatie van de eigenlijke redeneerprocessen die steunen op compatibiliteit. Op meta-theoretisch vlak blijft het resultaat uit [20] echter hoogst belangrijk.

Aangezien compatibiliteit op zich een centrale notie is voor de meeste vormen van 'ampliatief' redeneren en dus ook voor de explicatie ervan aan de hand van adaptieve logica's, is dit resultaat op zich al de moeite waard. Daarbovenop is het ook interessant met betrekking tot de resultaten uit [11]. In het laatste is aangetoond dat bewijsprocedures met prospectieve dynamiek kunnen fungeren als een criterium voor de centrale notie 'finale afleidbaarheid' uit het adaptief logica programma. Ik geef kort weer waar dit op neer komt. Doordat adaptieve logica's een explicatie willen vormen voor gevolgrelaties waarvoor geen positieve test bestaat, doet zich het volgende probleem voor: dynamische bewijzen kunnen enkel aangeven wat afleidbaar is op een welbepaald stadium van het bewijs, terwijl we eigenlijk geïnteresseerd zijn in de meer stabiele notie 'finale afleidbaarheid. Een algoritme hiervoor kan niet ontwikkeld worden daar er geen positieve test is voor deze gevolgrelaties. In het beste geval kunnen we steunen op een aantal criteria om te beslissen of een bepaalde A al dan niet finaal afleidbaar is uit een verzameling premissen Γ. Indien er niet direct criteria voor handen zijn, dan kunnen we nog steeds steunen op de resultaten uit [6] die resulteren uit de specifieke zoektocht naar dergelijke criteria. Deze zijn echter complex en de formulering van een specifiek bewijsformaat in termen van prospectieve dynamiek blijkt de constructie van dergelijke criteria op te vangen. Het zou in dat opzicht zeker interessant zijn om een dergelijke bewijsprocedure op te stellen voor de notie 'compatibiliteit'.

Bijlage A

Prospectieve Dynamiek in CL met Skolemisatie

Een aantal afkortingen:

$\mathcal{V}$ set of individual variables

$\mathcal{C}$ set of individual constants

in the rules: s = stage at which rule is applied (application results in $s+1$)

$\mathcal{C}_p$ members of $\mathcal{C}$ that occur in the premises

$\mathcal{C}_s$ members of $\mathcal{C}$ that occur in the proof at stage s

$\mathcal{C}_s^a$ members of $\mathcal{C}$ that are introduced by the rule C$\forall$E at stage s or earlier

F the set of functions f_i, each with a certain number of arguments

F_s the functions that occur at stage s of the proof

Bepaal de verzameling Σ van *termen* als volgt: (i) alle leden van $\mathcal{C}$ zijn termen en (ii) als f een symbool is voor een functie met n argumenten en $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zijn termen, dan is $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ een term.

$\Phi = \Sigma - \mathcal{C}$.

Φ_s members of Φ that occur at stage s of the proof

Φ_s^e members of Φ introduced in an application of $\exists$E at stage s or earlier

A_β^γ: result of replacing all occurrences of β in A by γ

$\Delta_\beta^\gamma = \{A_\beta^\gamma \mid A \in \Delta\}$

A.1 Intro

Normaal wordt Skolemisatie als volgt toegepast.

1 Zet A in prenex normaalvorm.

2 Laat de eerste existentiële quantor weg en vervang de variabele overal door een (nieuwe) functie van de variabelen waarover er universele quantoren voorkomen vóór de existentiële quantor. Herhaal dit. Voorbeeld: formule in PNF

$$\exists x_2 \forall x \exists y \forall z \exists x_1 (P x_2 x y \supset Q z x_1 y) \tag{A.1}$$

na eerste stap

$$\forall x \exists y \forall z \exists x_1 (Pf_0xy \supset Qzx_1y)$$

na tweede

$$\forall x \forall z \exists x_1 (Pf_0xf_1(x) \supset Qzx_1f_1(x))$$

na derde stap

$$\forall x \forall z (Pf_0xf_1(x) \supset Qzf_2(x,z)f_1(x)) .$$

wat een[1] SNF (Skolem normaalvorm) van de formule is (zie [23]).

2 In deze formule wordt daarna normaal gekwantificeerd, bijvoorbeeld UI:

$$\forall z (Pf_0af_1(a) \supset Qzf_2(a,z)f_1(a)) .$$

en nog eens

$$Pf_0af_1(a) \supset Qbf_2(a,b)f_1(a) . \tag{A.2}$$

Wij kunnen vanzelfsprekend niet eerst de formules in SNF zetten, want dat zou de prospectieve dynamiek gedeeltelijk overnemen (zoals bij een prolog-aanpak). We kunnen echter wel inwerken op de buitenste quantoren van een formule. Als de formule in SNF wordt gezet blijven die toch voorop staan.

Het idee is dus om eerst de buitenste quantor weg te werken, dan de volgende buitenste enz.

Als we de Skolemisatie op de voet te volgen, dan moeten we onthouden in welke volgorde de universele quantoren werden weggewerkt. Stel immers dat (A.2) voorkomt in een voorwaarde en wordt opgesplitst, maar dat in het tweede lid nog een quantor voorkomt. Dan moeten we onthouden welke constanten daar van universele quantoren afkomstig zijn. Nemen we de formule

$$\exists x \forall y \exists z \forall x_1 \exists y_1 (Pxyx_1y_1 \supset \exists z_1 Qzz_1) . \tag{A.3}$$

We werken op de buitenste quantoren en bekomen

$$Pf_0abf_2(a,b) \supset \exists z_1 Qf_1(a)z_1 .$$

Als daarna het tweede lid apart geraakt, bijvoorbeeld omdat de formule voorkomt in een voorwaarde en C⊃E erop wordt toegepast,

$$\exists z_1 Qf_1(a)z_1 , \tag{A.4}$$

dan moeten we bij het elimineren van deze existentiële quantor ook rekening houden met b, ondanks het feit dat ze niet in deze formule voorkomt. We bekomen dan

$$Qf_1(a)f_3(a,b) \tag{A.5}$$

[1] Sommige formules hebben meerdere SNF omdat ze PNF hebben waarin existentiële en universele quantoren verwisseld zijn. Een voorbeeld volgt in de tekst.

en niet

$$Qf_1(a)f_4(a)\,. \tag{A.6}$$

Dit is echter hoogst misleidend. Aangezien x_1 niet voorkomt in $\exists z_1 Qzz_1$, is (A.3) niet alleen gelijkwaardig aan

$$\exists x \forall y \exists z \forall x_1 \exists y_1 \exists z_1 (Pxyx_1y_1 \supset Qzz_1)$$

maar ook aan

$$\exists x \forall y \exists z \exists y_1 \exists z_1 \forall x_1 (Pxyx_1y_1 \supset Qzz_1)\,.$$

Anders gezegd, niet alleen de voorlaatste formule, maar ook de laatste is een PNF van (A.3). Daaruit volgt dat, als C⊃E wordt toegepast op (A.4), het resultaat niet (A.5) hoeft te zijn, maar gerust ook (A.6) mag zijn.

A.2 Omzetting naar prospectieve dynamiek

Het principe is dat we een lid van een voorwaarde of een formuledeel skolemiseren. De σ hierna is een lijst van termen; ik behandel σ als een verzameling om redenen die later duidelijk worden. Ik gebruik τ als variabele voor termen.

Zijn A een formuledeel. A is ofwel nieuw (premisse) ofwel bekomen uit een ander formuledeel. Zij $h_e(A)$ (de 'geschiedenis' van A) bepaald als: $A \in h_e(A)$ en als $B \in h_e(A)$ en B is bekomen uit C door een $\mathfrak{a}$-regel of door $\forall$E of $\exists$E[2] dan $C \in h_e(A)$. Zij $H_e(A)$ de verzameling van termen die in A voorkomen en die afkomstig zijn van een toepassing van $\forall$E op een lid van $h_e(A)$. Breidt H_e uit tot verzamelingen ($H_e(\Gamma) = \{B \in H_e(A) \mid A \in \Gamma\}$).

Een formule die voorkomt in een conditie komt ofwel nieuw voor in een conditie (wanneer ze er, bijvoorbeeld door toepassing van een $\mathfrak{b}$-regel terechtkomt) of is bekomen door toepassing van een regel op een formule uit de voorwaarde van een vorige lijn. Zij $h_a(A)$ bepaald als: $A \in h_a(A)$ en als $B \in h_a(A)$ en B is bekomen uit C door een CAR dan $C \in h_a(A)$. Zij $H_a(A)$ de verzameling van termen die in A voorkomen en die afkomstig zijn van een toepassing van C$\forall$E op een lid van $h_a(A)$. Breidt H_a uit tot verzamelingen.

Conditie-Analyserende regels

C$\forall$E	$\dfrac{[\Delta \cup \{\forall \alpha A(\alpha)\}]B}{[\Delta \cup \{A(\beta)\}]B}$	voor één $\beta \in \mathcal{C} - (\mathcal{C}_s \cup \mathcal{C}_p)$
C$\exists$E	$\dfrac{[\Delta \cup \{\exists \alpha A(\alpha)\}]B}{[\Delta \cup \{A(f_i(\sigma))\}]B}$	$f_i \notin \mathsf{F}_s$ $\sigma = H_a(\Delta \cup \{\exists \alpha A(\alpha)\})$

[2]Regels voor de identiteit hebben alleen effect op de voorwaarden.

Formule-Analyserende regels

$\forall$E	$\dfrac{[\Delta]\forall\alpha A(\alpha)}{[\Delta]A(\beta)}$	voor een $\beta \in \mathcal{C} \cup \Phi \cup \mathcal{V}$ als $\beta \in \mathcal{V}$ dan komt β niet voor in $\forall\alpha A(\alpha)$[3]
$\exists$E	$\dfrac{[\Delta]\exists\alpha A(\alpha)}{[\Delta]A(f_i(\sigma))}$	$f_i \notin \mathsf{F}_s$ $\sigma = H_e(\exists\alpha A(\alpha))$

Andere regels en CDet De regels $\sim\forall$E, $\sim\exists$E, C$\sim\forall$E, C$\sim\exists$E en de regels voor de identiteit stellen geen probleem, evenmin als de propositionele regels die we kunnen samenvatten als $\mathfrak{a}$E, $\mathfrak{b}$E, C$\mathfrak{a}$E en C$\mathfrak{b}$E. De enige andere regels zijn Trans, EM en EM0. We behouden deze drie regels met de *beperking* dat ze niet mogen worden toegepast op lijnen met een voorwaarde of een conclusiedeel waarin vrije variabelen voorkomen.[4]

Tenslotte: [5]

CDet	$\dfrac{[\Delta]A}{[\Delta^{f_j(\sigma)}_{f_i(\sigma)}]A^{f_j(\sigma)}_{f_i(\sigma)}}$	voorwaarde: $f_i(\sigma)$ werd in het bewijs ingevoerd door toepassing van C$\exists$E of werd in $h_a(\Delta)$ ingevoerd door toepassing van C$\exists$E

Merk op dat de vervanging in CDet zowel in de voorwaarde als in de formule moet gebeuren. *Dit moet overigens ook in de andere procedures indien leden van $\mathcal{A}$ kunnen voorkomen in het formuledeel.*

Voor de interpretatie van $\exists$E, C$\exists$E en CDet moeten we erop letten wanneer iets een functie van σ is. Het volgende is alvast relevant.

1. Voor elke functie van $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ is er een unieke functie van elke permutatie van deze elementen die precies dezelfde waarde oplevert. We kunnen de Skolem-functies dus veilig zien alsof ze verzamelingen met een bepaald aantal leden afbeelden op het domein.

2. Voor elke f met n argumenten is er een functie g met $n+m$ argumenten zodat $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ "is" dus een functie van $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$.

3. Als f_i een functie met nul argumenten is, dan is het een constante functie. Voor elke functie $f_j(\sigma, f_i)$ is er dus een functie $f_k(\sigma)$ zodat $f_k(\sigma) = f_j(\sigma, f_i)$. $f_j(\sigma, f_i)$ "is" dus een functie van σ. Zo kan $f_i(f_j)$ (een functie met 1 argument van een functie met nul argumenten) gezien worden als een functie met 0 argumenten.

[3]Uitzondering: β mag α zelf zijn op voorwaarde dat geen enkele 'occurrence' van α voorkomt binnen het bereik van een andere quantor over α dan de eerste quantor in $\forall\alpha A(\alpha)$.

[4]Zoals we zullen zien in afdeling A.4 schrijven we alleen open formules als dat nodig is om een nieuwe premisse te kunnen invoeren (om een target te bekomen dat een positief deel is van een nog niet ingevoerde premisse). Eens die premisse is ingevoerd wordt een nieuwe constante of functionele uitdrukking ingevoerd en herhalen we de stappen met die constante op de plaats van de vrije variabele.

[5]De voorwaarde wordt duidelijk in afdeling A.5.

Wegens 3 mag in Cdet een functie-uitdrukking met n argumenten soms worden vervangen door een functie-uitdrukking met minder argumenten, nl. evenveel minder als er constante functies onder de argumenten zijn. Wegens 2 kan elke functie met n argumenten steeds worden gezien als een functie met meer argumenten.

CDet kan gemakkelijk tot verwarringen leiden.Het beste zou zijn de regel gewoon te verwijderen. Een voorwaarde waarin een functionele uitdrukking voorkomt kan nodig zijn met betrekking tot de 'positief deel'-relatie, nl. om een premisse te kunnen invoeren. Als ze echter daarna moet worden vervangen met CDet, dan kan heel de zaak best worden overgedaan. Anders gezegd: het resultaat van een toepassing van CDet kan het best omschreven worden als correct op voorwaarde dat het ook kon worden bekomen zonder CDet. We kunnen dat CDet eenvoudiger schrijven als

CDet $\quad \dfrac{[\Delta]A}{[\Delta^{\tau'}_{\tau}]A^{\tau'}_{\tau}}$ voorwaarde: τ werd in het bewijs ingevoerd door toepassing van C∃E of werd in $h_a(\Delta)$ ingevoerd door toepassing van C∃E

De bovenstaande formulering van de regels laat niet toe functies te vervangen door functies met meer of minder argumenten (zie voorlaatste alinea)—zelfs de eerste formulering van CDet laat dit niet toe. De regel C∃E moet dan als volgt worden geformuleerd:

C∃E $\quad \dfrac{[\Delta \cup \{\exists\alpha A(\alpha)\}]A}{[\Delta \cup \{A(\tau)\}]A}$ waar τ een functie is van $H_a(\Delta \cup \{\exists\alpha A(\alpha)\})$

of correcter: waar τ een term is die een functie van $H_a(\Delta \cup \{\exists\alpha A(\alpha)\})$ benoemt. Ook de eis dat het om een nieuwe latter voor functies gaat valt volledig weg.

Ook de regel ∃E moet ook worden veranderd. Deze regel bepaalt wat een premisse of andere formule ons oplevert. Dat is ten eerste steeds een nieuwe functionele uitdrukking: $f_i \notin \mathsf{F}_s$. Ten tweede moet τ een functie zijn van $H_e(\exists\alpha A(\alpha))$. Zo levert $\forall x\forall y\exists zPxyz$ ons bijvoorbeeld $Pabf_i(a,b)$ of en niet $Pabf_i(a)$, want daarvoor hebben we $\forall x\exists z\forall yPxyz$ nodig en dat volgt uiteraard niet uit $\forall x\forall y\exists zPxyz$.

Er is echter een uitzondering. Precies die speelt een rol in voorbeeld 18—zie afdeling A.5. Wanneer een lid van $H_e(\exists\alpha A(\alpha))$, stel β, dat dus afkomstig is van een universele quantor, stel $\forall\gamma$, in een lid van $h_e(\exists\alpha A(\alpha))$, niet samen met een α die door de quantor $\exists\alpha$ wordt gebonden voorkomt in een primitieve formule, dan is het mogelijk $A(\alpha))$ zodanig te transformeren dat de universele quantor $\forall\gamma$ *na* de existentiële quantor $\exists\alpha$ komt in de PNF.

Daarom voegen we het volgende toe na de definitie van $H_e(A)$: $H^{\circ}_e(\exists\alpha A(\alpha))$ is de verzameling van leden van $H_e(\exists\alpha A(\alpha))$ die in een primitieve subformule van $\exists\alpha A(\alpha)$ samen voorkomen met een α die door de $\exists\alpha$ gebonden is. De regel ∃E wordt nu:

∃E $\quad \dfrac{[\Delta]\exists\alpha A(\alpha)}{[\Delta]A(f_i(\sigma))}$ $\quad f_i \notin \mathsf{F}_s$, $\sigma = H^{\circ}_e(\exists\alpha A(\alpha))$

Helaas Ook met deze definitie is de zaak niet volledig zoals het zou moeten. Beschouw immers $[\Delta]\forall x\exists y(Px \supset (Qy\vee(Rxy\wedge{\sim}Rxy))$, en zij $[\Delta]\exists y(Pa \supset (Qy\vee (Ray\wedge{\sim}Ray))$ het resultaat van een toepassing van C∀E. Hier komen a en y samen voor in een primitieve subformule, terwijl $[\Delta]Pa \supset (Qf_0\vee(Raf_0\wedge{\sim}Raf_0))$ wel degelijk een correct gevolg is (dat we met C∃E zouden willen afleiden) om de eenvoudige reden dat $Qf_0 \vee (Raf_0 \wedge {\sim}Raf_0)$ gelijkwaardig is aan Qf_0, zodat die a erbij staat voor Piet Snot.

A.3 Voorbeelden

Wat voorbeelden van bewijzen in dit formaat. Voorbeeld 14: $\forall x\exists y\forall zPxyz \vdash \exists x\forall z\exists yPxyz$.

1	$[\exists x\forall z\exists yPxyz]\exists x\forall z\exists yPxyz$	Goal
2	$[\forall z\exists yPf_0yz]\exists x\forall z\exists yPxyz$	1; C∃E
3	$[\exists yPf_0ya]\exists x\forall z\exists yPxyz$	2; C∀E
4	$[Pf_0f_1(a)a]\exists x\forall z\exists yPxyz$	3; C∃E
5	$\forall x\exists y\forall zPxyz$	Prem
6	$\exists y\forall zPf_0yz$	5; ∀E
7	$\forall zPf_0f_2(f_0)z$	6; ∃E
8	$Pf_0f_2(f_0)a$	7; ∀E
9	$[Pf_0f_2(f_0)a]\exists x\forall z\exists yPxyz$	3; CDet
10	$\exists x\forall z\exists yPxyz$	8, 9; Trans

Ad 9. $f_2(f_0)$ is zelf een constante en dus ook een functie van a. Met de gewijzigde C∃E kunnen we de verantwoording van 9 veranderen in “2; C∀E” en zo hoort het.

Voorbeeld 15: $\forall x(Px \supset Qx), \exists xPx \vdash \exists xQx$:

1	$[\exists xQx]\exists xQx$	Goal
2	$[Qf_0]\exists xQx$	1; C∃E
3	$\forall x(Px \supset Qx)$	Prem
4	$Pf_0 \supset Qf_0$	3; ∀E
5	$[Pf_0]Qf_0$	4; ⊃E
6	$\exists xPx$	Prem
7	Pf_1	6; ∃E
8	$[Pf_1]Qf_1$	5; CDet
9	Qf_1	8, 7; Trans
10	$[Qf_1]\exists xQx$	2; CDet
11	$\exists xQx$	9, 10; Trans

CDet kan hier gemakkelijk worden uitgeschakeld met de gewijzigde C∃E. Na 6 kan 6a worden toegevoegd: $Pf_1 \supset Qf_1$ met als verantwoording “3; ∀E”; de verantwoording van 7 kan worden gewijzigd in "6a; $\supset$E". De verantwoording kan worden veranderd in "1; C$\exists$E".

Voorbeeld 3: $\forall x\forall z\exists yPxyz \vdash \exists x\exists y\forall zPxyz$ *moet mislukken.*

1	$[\exists x\exists y\forall zPxyz]\exists x\exists y\forall zPxyz$	Goal
2	$[\exists y\forall zPf_0yz]\exists x\exists y\forall zPxyz$	1; C$\exists$E
3	$[\forall zPf_0f_1z]\exists x\exists y\forall zPxyz$	2; C$\exists$E
4	$[Pf_0f_1a]\exists x\exists y\forall zPxyz$	3; C$\forall$E
5	$\forall x\forall z\exists yPxyz$	Prem
6	$\forall z\exists yPf_0yz$	5; $\forall$E
7	$\exists yPf_0ya$	6; $\forall$E
8	$Pf_0f_2(a)a$	7; $\exists$E

STOP

De voorwaarde van 4 kan niet door CDet worden vervangen door $Pf_0f_2(a)a$ omdat $f_2(a)$ een functie met 1 argument is terwijl f_1 nul argumenten heeft en dus alleen 'ingevuld' kan worden door een functie met 0 argumenten.

Dit voorbeeld is centraal en helder. De toepassing van C$\forall$E in 3 eist dat op die plaats een functie zonder argumenten komt. Staat er op die plaats een functie van z (van de constante die later op de plaats van z komt), dan kunnen we daaruit niet de voorwaarde van 2, $\exists y\forall zPf_0yz$, maar hoogstens $\forall z\exists yPf_0yz$ verantwoorden. Wanneer we de quantor over y elimineren in lijn 7, dan bekomen we op de plaats van de y een functie van a.

Sommige toepassingen lijken complex. Voorbeeld 16: $\forall z\forall x\forall yPxyz \vdash \forall x\forall y\exists zPxyz$.

1	$[\forall x\forall y\exists zPxyz]\forall x\forall y\exists zPxyz$	Goal
2	$[\forall y\exists zPayz]\forall x\forall y\exists zPxyz$	1; C$\forall$E
3	$[\exists zPabz]\forall x\forall y\exists zPxyz$	2; C$\forall$E
4	$[Pabf_0(a,b)]\forall x\forall y\exists zPxyz$	3; C$\exists$E
5	$\forall z\forall x\forall yPxyz$	Prem
6	$\forall x\forall yPxyf_0(x,y)$	5; $\forall$E
7	$\forall yPayf_0(a,y)$	5; $\forall$E
8	$Pabf_0(a,b)$	7; $\forall$E
9	$\forall x\forall y\exists zPxyz$	8, 4; Trans

De minder erge complicatie bestaat erin dat we op lijn 7 ook in de annotatie de x door a moeten vervangen. In dit geval lijkt dit niet zo belangrijk, omdat er vanaf lijn 5 toch geen existentiële quantor voorkomt. De vraag is of er geen andere gevallen zijn.

Erger is dat we op lijn 6 moeten zien dat we een instantie moeten nemen met $f_0(x,y)$. Ook in dit geval zouden we rechtstreeks met $f_0(a,b)$ mogen instantiëren. De vraag is of dit altijd mag.

Ik heb over beide gevallen nagedacht. Als het tweede geen probleem is, doet het eerste zich uiteraard niet voor. Als er complicaties zijn, zitten ze (denk ik) in de gevallen waar CDet wordt toegepast en in het toepassen van quantor-eliminatie op formules met een niet-lege voorwaarde. Maar ik zie niet wat er mis zou kunnen lopen. Ik herhaal dus het bewijs:

1	$[\forall x \forall y \exists z Pxyz]\forall x \forall y \exists z Pxyz$	Goal
2	$[\forall y \exists z Payz]\forall x \forall y \exists z Pxyz$	1; C∀E
3	$[\exists z Pabz]\forall x \forall y \exists z Pxyz$	2; C∀E
4	$[Pabf_0(a,b)]\forall x \forall y \exists z Pxyz$	3; C∃E
5	$\forall z \forall x \forall y Pxyz$	Prem
6	$\forall x \forall y Pxyf_0(a,b)$	5; ∀E
7	$\forall y Payf_0(a,b)$	5; ∀E
8	$Pabf_0(a,b)$	7; ∀E
9	$\forall x \forall y \exists z Pxyz$	8, 4; Trans

Verdere verduidelijking. Het (enige) target van 4 is een 'positief deel' van 5, en daarom voeren we 5 in. Daarna instantëren we stap voor stap zo in 5 dat we het target van 4 bekomen. Als je na 6 met andere termen begint te instantiëren bekom je uiteraard rommel, maar dat lag voor de hand: als je niet het target van 4 bekomt, kan je met het resultaat van de instantiëring niets doen.

A.4 Reden om open formules in te voeren

Voorbeeld 17: $\forall x \exists y(Px \supset Qy), \exists x Px \vdash \exists y Qy$

1	$[\exists y Qy]\exists y Qy$	Goal
2	$[Qf_0]\exists y Qy$	1; C∃E
3	$\forall x \exists y(Px \supset Qy)$	Prem

Hierna loopt het mis. Instantiëren met een lid van $\mathcal{A}$ kan niet meer. Als we x instantiëren met f_0 dan bekomen we een formule waarvan Qf_0 geen positief deel is. Ik denk daarom dat het best is x te instantiëren met een constante van een nieuw soort, *of* toe te laten dat we open formules schrijven, zoals de regels ∀E al zegt.

Het lijkt me best toe te laten dat we open formules schrijven, maar alleen totdat een nieuw bruikbaar target is gevonden. Dit komt erop neer dat we toelaten dat ∀E resulteert in een open formule, en dat we deze verder analyseren tot we een target bekomen waarvan een premisse (hopelijk) een positief deel is. Bij deze analyse moeten we nooit Trans, EM of EM0 toepassen.

4	$\exists y(Px \supset Qy)$	3; ∀E
5	$(Px \supset Qf_1(x))$	4; ∃E
6	$[Px]Qf_1(x)$	5; ⊃E

Nu blijkt Px een positief deel van de tweede premisse.[6]

7	$\exists x Px$	Prem
8	Pf_2	7; ∃E
9	$\exists y(Pf_2 \supset Qy)$	3; ∀E
10	$(Pf_2 \supset Qf_1(f_2))$	9; ∃E
11	$[Pf_2]Qf_1(f_2)$	10; ⊃E
12	$Qf_1(f_2)$	8, 11; Trans
13	$[Qf_1(f_2)]\exists y Qy$	2; CDet
14	$\exists y Qy$	12, 13; Trans

Waardoor het doel bereikt is. Merk op dat de stappen 4–6 worden "overgedaan" door 9–11 en dat de verantwoording van 13 kan worden gewijzigd in "1; C∃E".

A.5 Schijnbaar lastig geval

Dit is een voorbeeld waarop ik lang heb gesukkeld, maar dat een bevredigende oplossing heeft met de huidige regels, nl. met de gewijzigde regel ∃E op lijn 7 hierna. Ik laat dus wat meer staan dan nodig is, omdat het verder verduidelijkt waarom het aantal argumenten van de functies een rol speelt.

Voorbeeld 18: $\forall x \exists y(Px \supset Qy) \vdash \exists x Px \supset \exists y Qy$.

1	$[\exists x Px \supset \exists y Qy]\exists x Px \supset \exists y Qy$	Goal	
2	$[\sim\exists x Px]\exists x Px \supset \exists y Qy$	1; C⊃E	
3	$[\forall x{\sim}Px]\exists x Px \supset \exists y Qy$	2; C∼∃E	
4	$[\sim Pa]\exists x Px \supset \exists y Qy$	3; C∀E	
5	$\forall x \exists y(Px \supset Qx)$	Prem	
6	$\exists y(Pa \supset Qy)$	5; ∀E	
7	$Pa \supset Qf_0$	6; ∃E	
8	$[\sim Qf_0]{\sim}Pa$	7; ⊃E	$\vert{\sim}Qf_0$
9	$[\sim Qf_0]\exists x Px \supset \exists y Qy$	4, 8; Trans	
10	$[\exists y Qy]\exists x Px \supset \exists y Qy$	1; C⊃E	
11	$[Qf_1]\exists x Px \supset \exists y Qy$	10; C∃E	$\vert Qf_1$
12	$[Qf_0]\exists x Px \supset \exists y Qy$	11; CDet	$\vert{\sim}Qf_1$
13	$\exists x Px \supset \exists y Qy$	9, 12; EM	

De CDet in 12 is verantwoord omdat we de verantwoording van 12 kunnen wijzigen in "10; C∃E".

Belangrijk Dit voorbeeld illustreert het gevaar dat kan optreden bij het toepassen van CDet. Op lijn 7 moet f_0 een functie zijn die nog niet voorkomt in het bewijs. Het mocht natuurlijk evengoed f_1 zijn, want ook die kwam nog niet voor. Maar als we f_0 invoeren op 7 en later f_1 invoeren, zoals hier op 11, dan

[6]Waar $\beta \in \mathcal{V}$, pd$(A(\beta), \exists\alpha A(\beta))$.

mogen we f_0 niet met CDet vervangen door f_1, *ook niet* in lijn 8 of op lijn 9. Eens f_1 is ingevoerd, kunnen we nl. lijn 7–9 niet meer herhalen met f_1 in plaats van f_0, want de functie die op lijn 7 wordt ingevoerd, of op een duplicaat van lijn 7, moet een functie zijn die nog nergens voorkomt in het bewijs.

Commentaar bij de fout in de vorige versie De redenering in die versie was juist en toonde aan dat de op 7 ingevoerde functie niet mag worden vervangen door de op 11 ingevoerde functie. De reden daarvoor was *niet* het aantal argumenten van die functie (zoals vroeger ook al duidelijk was), maar wat ik nu hierboven heb verduidelijkt: CDet kan alleen worden toegepast op een functie (analoog in het geval van een lid van $\mathcal{A}$) die werd ingevoerd in een toepassing van C∃E, en CDet mag nooit worden toegepast op een functie (analoog in het geval van een lid van $\mathcal{A}$) die werd ingevoerd in een toepassing van ∃E.

Mijn vroegere redenering leidde correct tot het besluit dat de vervanging moet gebeuren zoals ze nu gebeurt, maar dat was fout omdat toen op lijn 7 een functie van a werd ingevoerd, nl. $f_0(a)$, en die kon niet in de plaats van f_1 komen omdat ze een argument te veel had. De oplossing bestaat erin dat ∃E zo mag worden verzwakt dat in 7 een functie zonder argumenten moet worden ingevoerd omdat a niet voorkomt in Qy.

Hier volgt de aangepaste vroegere redenering met wat commentaar tussen vierkante haakjes. Wat wel gegeven is: voor *elk* element a is er minstens een element f_0 waarvoor geldt: Qf_0 is voldoende voor het Doel [want als gelijk welk element eigenschap eigenschap Q heeft is het Doel waar] en ook $\sim Qf_0$ is voldoende voor het Doel [want de premisse garandeert dat f_0 het element is waarvoor geldt dat Pa vals is als Qf_0 vals is, en aangezien a willekeurig is (want niet voorkomt in de premissen) hebben we getoond dat er voor elke x uit 5 een dergelijk element f_0 is].

Dit moet ook meteen een oplossing geven voor het oude bewijsformaat.

Bijlage B

Direct Dynamic Proofs for Classical Compatibility

Deze bijlage werd aangeboden ter publicatie in 'Logique et Analyse' en werd uitgewerkt in samenwerking met Joke Meheus – zie [38].

B.1 Introduction

The scope of formal studies of reasoning has traditionally been restricted to deductive inference patterns. As a consequence, the contribution of formal logic to the understanding of actual reasoning processes has been relatively small. Indeed, both in the sciences and in everyday life, many reasoning processes are *ampliative* in nature: they lead to conclusions that 'extend' the information contained in the premises. Obvious examples include the use of induction to generate new generalizations and the use of abduction to generate new explanatory hypotheses.

It is only in recent years that computer scientists as well as logicians started paying attention to ampliative forms of reasoning. Important contributions to the formal study of ampliative reasoning are the (computer science) literature on non-monotonic logics and some recent results in the adaptive logics program (see, for instance, [17], [19] and [34]).

Two important insights resulted from these studies. The first is that compatibility is one of the basic concepts for the study of ampliative reasoning.[1] The reason is simple: a necessary requirement for an ampliative inference to be sound is that its conclusion is compatible with its premises. In the case of default reasoning, for instance, only those default rules can be applied that are compatible with one's theory. Sometimes it is moreover required that the different conclusions are mutually compatible. For instance, in order for an inductive generalization to be sound, it should not only be compatible with the

[1] A sentence A is said to be compatible with a set of premises Γ, according to some logic $\mathbf{L}$, iff $\Gamma \nvdash_{\mathbf{L}} \neg A$. What this comes to, semantically, is that A is true in *some* $\mathbf{L}$-model of Γ.

available data, but also with all other generalizations that can be generated from the same set of data (see [17]).

The second insight is that compatibility claims are not blind guesses, but are arrived at by *reasoning*. A central result in this respect is the logic **COMPAT** from [20]. This logic captures the concept of *classical compatibility*. Thus, where **CL** stands for Classical Logic, **COMPAT** leads from a set of sentences Γ to the set of sentences that are **CL**-compatible with Γ. If Γ is inconsistent, then, like **CL**, **COMPAT** leads to triviality.[2]

The importance of **COMPAT** is that it offers a *proof theory* for compatibility. It thus allows one to reason *from* a set of premises *to* the sentences that are compatible with them. A special feature of the proof theory is that it is *dynamic*. This is related to the fact that compatibility is *non-monotonic* (q is compatible with $\{p\}$, but not with $\{p, \neg q\}$), and that, moreover, at the predicative level, there is no positive test for it. As is shown in [20], the dynamic proof theory warrants that, even for undecidable fragments, one obtains a sensible and rational estimate of which sentences are compatible with the Γ under consideration. It is also shown that the dynamic proof theory is sound and complete with respect to a very nice and intuitive semantics.

As all forms of ampliative reasoning are ultimately based on specific kinds of compatibility relations, it seems warranted to expect that the results from [20] are a useful basis to design proof theories for different types of ampliative reasoning.

There is, however, one proviso: in [20], the logic **COMPAT** is characterized in an *indirect* way. More specifically, the definition of the logic is based, on the one hand, on a modal translation of the premises and the conclusion and, on the other hand, on a modal logic (based on **S5**, and called **COM**) that allows one to make inferences from this translation. The logic **COMPAT** is obtained by stipulating that A is a **COMPAT**-consequence of Γ iff the modal translation of A is a **COM**-consequence of the modal translation of Γ.

The modal translation is quite simple and intuitively appealing. Where $\Gamma^{\Box}$ stands for $\{\Box A \mid A \in \Gamma\}$, $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{COM}} \Diamond A$ is taken to express that A is compatible with Γ, and $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{COM}} \neg\Diamond A$ that A is incompatible with Γ. This is motivated by the fact that A is **CL**-compatible with Γ iff A is true in some **CL**-model of Γ, and hence, iff A is *possible* in view of Γ. As the members of Γ are true in *all* **CL**-models of Γ, it is easily observed that A is true in some **CL**-model of Γ iff $\Diamond A$ is true in some **S5**-model of $\Gamma^{\Box}$.

The advantage of this modal translation is that it leads in a very natural way

[2] In [20], a second logic of compatibility is presented, **COMPAT***, that does not have this property. If Γ is inconsistent, then, according to **COMPAT***, nothing is compatible with Γ, not even the members of Γ themselves. In [33], it is argued, however, that both **COMPAT** and **COMPAT*** are inadequate to handle inconsistent sets of premises. In the same paper, a logic of paraconsistent compatibility is presented that leads to the same results as **COMPAT** and **COMPAT*** for the consistent case, but that nevertheless allows for the sensible handling of inconsistent sets.

to a semantics for compatibility (see the next section). The problem remains, however, that the proof theory of **COM**, precisely because it is formulated in modal terms, falls short to explicate actual reasoning processes that involve compatibility considerations.

The aim of this paper is to present a *direct* proof theory for **COMPAT** (that proceeds entirely in the language of **CL**) and to show that it is equivalent to the indirect proof theory from [20]. Note that our claim is not that the direct characterization of **COMPAT** should replace the indirect one. The logic **COM** remains important from a meta-theoretical point of view—it is, for instance, far from evident that it is possible to design a direct semantics for compatibility. We do claim, however, that the direct proof theory is better suited to explicate actual reasoning processes.

B.2 The Logic COM

In this section, we present a brief overview of the logic **COM**. For more details, we refer the reader to [20].

The logic **COM** is an adaptive logic. The first logic in this family was designed by Diderik Batens around 1980 (see [3]) and was meant to interpret inconsistent sets of premises 'as consistently as possible'. Later, the notion of an adaptive logic was generalized not only to include other types of logical abnormalities (such as negation-incompleteness) but also to include ampliative forms of reasoning—see [10] and [18] for recent introductions to the topic.

The basic idea behind adaptive logics is that they interpret sets of premises 'as normally as possible'. What this comes to is that a sentence A is supposed to behave 'normally' with respect to a set of premises Γ *unless* Γ explicitly prevents so. Depending on how 'normal' is specified, one obtains a different adaptive logic. Inconsistency-adaptive logics, for instance, interpret sets of premises as consistently as possible; ambiguity-adaptive logics interpret them as unambiguously as possible.

In the case of the logic **COM**, it is the incompatibility of A with Γ that counts as an abnormality.[3] Thus, the plot behind **COM** is to assume that a sentence A is compatible with Γ unless this is prevented by Γ—that is, unless A is incompatible with Γ or, what comes to the same, unless $\Gamma^{\Box} \vDash_{\mathbf{S5}} \neg\Diamond A$.

Semantically, this is realized by making a *selection* of the **S5**-models of $\Gamma^{\Box}$. Intuitively, those **S5**-models of $\Gamma^{\Box}$ are selected that verify a formula of the form $\neg\Diamond A$ iff it is 'unavoidable' in view of $\Gamma^{\Box}$ (that is, iff it is true in *all* **S5**-models of $\Gamma^{\Box}$). For example, some **S5**-models of $\{\Box p\}$ verify $\neg\Diamond q$ and others verify $\neg\Diamond\neg q$—this is the reason why neither $\Diamond q$ nor $\Diamond\neg q$ is an **S5**-consequence of $\{\Box p\}$. However, as neither $\neg\Diamond q$ nor $\neg\Diamond\neg q$ are unavoidable in view of $\Gamma^{\Box}$,

[3] Note that "abnormality" does not refer to some standard of deduction, say **CL**. It refers to presuppositions that, in a particular application context, are regarded as desirable, but that may be overruled.

S5-models that verify one of them, are not included in the selection. As a consequence, all selected models verify $\Diamond q$ as well as $\Diamond \neg q$, which is exactly what we want.

In order to formulate the semantics of **COM** in a more precise way, we first need some definitions.[4]

Let $\mathcal{L}$ be the standard language of **CL** (including $\perp$, syntactically defined by $\perp \supset A$) and let Ω be the set $\{\neg\Diamond A \mid A \text{ is a wff of } \mathcal{L}\}$. Henceforth, members of Ω will be called "abnormalities".

The abnormalities that are *unavoidable* in view of $\Gamma^{\Box}$ are defined as:

Definitie 16 $Ab(\Gamma^{\Box}) = \{A \in \Omega \mid \Gamma^{\Box} \models_{\mathbf{S5}} A\}$.

and the "abnormal part" of an **S5**-model $\mathcal{M}$ as:

Definitie 17 $Ab(\mathcal{M}) = \{A \in \Omega \mid \mathcal{M} \textit{ verifies } A\}$.

For a given set of premises $\Gamma^{\Box}$, the selection of the **COM**-models is now defined as follows:

Definitie 18 *An* **S5***-model* $\mathcal{M}$ *is a* **COM***-model of* $\Gamma^{\Box}$ *iff* $Ab(\mathcal{M}) = Ab(\Gamma^{\Box})$.

Definition 18 warrants that, for any $\Gamma^{\Box}$, the selected models verify no other abnormalities than those that are unavoidable in view of $\Gamma^{\Box}$. Note especially that, in view of this definition, and as is usual for adaptive logics, it does not make sense to say that some **S5**-model is a **COM**-model, but only that it is a **COM**-model *of* some set of premises $\Gamma^{\Box}$.

As may be expected, the semantic consequence relation is defined with respect to the selected models:

Definitie 19 $\Gamma^{\Box} \models_{\mathbf{COM}} A$ *iff all* **COM***-models of* $\Gamma^{\Box}$ *verify* A.

The following theorem shows the intuitive adequacy of the above definitions.[5] We refer to [20] for its proof:

Theorema 5 *Where* A *is a wff of* $\mathcal{L}$, $\Gamma^{\Box} \models_{\mathbf{COM}} \Diamond A$ *iff* $\Gamma \not\models_{\mathbf{CL}} \neg A$ *or* $\Gamma \models_{\mathbf{CL}} \perp$.

Let us now turn to the proof theory. As was mentioned above, the proof theory of **COM** is dynamic: formulas that, at some stage of the proof, are considered to be derived, may at a later stage be 'withdrawn'. Technically, this is realized by attaching, to each line in the proof, a 'condition' (a possibly empty set of abnormalities).

Thus, lines in a **COM**-proof have the following structure:

[4] In [20], the actual semantics for **COM** is presented as well as a simplified version; we immediately give the simplified one.

[5] Remember that, for inconsistent sets of premises, **COM** leads to triviality.

$i \quad A \quad j_1, \ldots, j_n \quad \text{RULE} \quad \Delta$

The first four elements are as usual: i is the line number, A is the formula that is derived, $j_1, \ldots j_n$ ($n \geq 0$) stand for the line numbers of the formulas from which A is derived, and the fourth element is the justification (the rule by means of which A is derived). The fifth element, Δ, is the condition. Intuitively, this set contains the abnormalities that should not be derivable in order for A to be derivable.

The function of the condition is most easily illustrated by means of an example. Consider $\Gamma = \{(\forall x)(Qx \supset \neg Sx),\ (\forall x)(Px \supset Rx),\ Ra \wedge Sa\}$ and suppose that we want to check whether $(\forall x)(Rx \supset Qx)$, $(\forall x)(Px \supset Qx)$ and $(\forall x)(Sx \supset Px)$ are compatible with Γ. In **COM**, this comes down to checking whether $\Diamond(\forall x)(Rx \supset Qx)$, $\Diamond(\forall x)(Px \supset Qx)$ and $\Diamond(\forall x)(Sx \supset Px)$ are **COM**-derivable from $\Gamma^{\Box} = \{\Box(\forall x)(Qx \supset \neg Sx),\ \Box(\forall x)(Px \supset Rx),\ \Box(Ra \wedge Sa)\}$. This may be done like this.

First, we enter the premises:

1	$\Box(\forall x)(Qx \supset \neg Sx)$	–	PREM	$\emptyset$
2	$\Box(\forall x)(Px \supset Rx)$	–	PREM	$\emptyset$
3	$\Box(Ra \wedge Sa)$	–	PREM	$\emptyset$

Note that the premises are entered on the empty condition. This is as it should be: the derivability of the premises is not dependent on the normal behaviour of any formula. If a formula A is derived on a line that has the empty set as its fifth element, then A will be said to be derived *unconditionally*.

Next, we add the following lines:

4	$\Diamond(\forall x)(Rx \supset Qx)$	–	RC	$\{\neg\Diamond(\forall x)(Rx \supset Qx)\}$
5	$\Diamond(\forall x)(Px \supset Qx)$	–	RC	$\{\neg\Diamond(\forall x)(Px \supset Qx)\}$
6	$\Diamond(\forall x)(Sx \supset Px)$	–	RC	$\{\neg\Diamond(\forall x)(Sx \supset Px)\}$

The rule RC is a *conditional* rule: it allows one to add $\Diamond A$ to the proof (for any formula A of $\mathcal{L}$) on the condition $\{\neg\Diamond A\}$. This corresponds to the assumption that $\Diamond A$ is **COM**-derivable from the premises *unless* $\neg\Diamond A$ is **S5**-derivable from them.

Some readers may object that the condition of line 4 is not satisfied—$\neg\Diamond(\forall x)(Rx \supset Qx)$ *is* **S5**-derivable from the premises—and hence, that it should not be possible to add this line to the proof. However, as is usual for adaptive logics, it is allowed in **COM**-proofs that inferences are made on the basis of one's best insights in the premises (that is, on the basis of what is explicitly written down in the proof). So, as long as $\neg\Diamond(\forall x)(Rx \supset Qx)$ has not been derived in the proof, the formula of line 4 will be considered to be derived.

Suppose now that we continue the proof as follows:

7	$\neg\Diamond Qa$	$1, 3$	RU	$\emptyset$
8	$\neg\Diamond(\forall x)(Rx \supset Qx)$	$3, 7$	RU	$\emptyset$

The rule RU is a generic rule that allows one to add B to the proof whenever B is **S5**-derivable from $A_1, \ldots, A_n$ and $A_1, \ldots, A_n$ occur in the proof. Note that RU is an *unconditional* rule: it does not lead to the introduction of new conditions. So, if B is derived from $A_1, \ldots, A_n$, the condition of the line at which B occurs is simply the union of the conditions of the lines at which $A_1, \ldots, A_n$ occur.

At stage 8 of the proof, it has been established that the condition of line 4 is not satisfied. Hence, at this stage of the proof, the formula of line 4 should no longer be considered as derived in the proof. This will be expressed by 'marking' line 4:

1	$\Box(\forall x)(Qx \supset \neg Sx)$	–	PREM	$\emptyset$	
2	$\Box(\forall x)(Px \supset Rx)$	–	PREM	$\emptyset$	
3	$\Box(Ra \wedge Sa)$	–	PREM	$\emptyset$	
4	$\Diamond(\forall x)(Rx \supset Qx)$	–	RC	$\{\neg\Diamond(\forall x)(Rx \supset Qx)\}$	$\boxed{8}$
5	$\Diamond(\forall x)(Px \supset Qx)$	–	RC	$\{\neg\Diamond(\forall x)(Px \supset Qx)\}$	
6	$\Diamond(\forall x)(Sx \supset Px)$	–	RC	$\{\neg\Diamond(\forall x)(Sx \supset Px)\}$	
7	$\neg\Diamond Qa$	1, 3	RU	$\emptyset$	
8	$\neg\Diamond(\forall x)(Rx \supset Qx)$	3, 7	RU	$\emptyset$	

A formula is considered to be derived *at a stage s* of a **COM**-proof from $\Gamma^{\Box}$ iff it occurs on line i that, at that stage of the proof, is not marked. So, the formulas on lines 4 to 6 are all considered to be derived up to stage 7 of the proof, but the one on line 4 is no longer considered to be derived at stage 8. Note that, no matter how the proof is extended, it will not be possible to mark lines 5 and 6. This is why we say that $\Diamond(\forall x)(Px \supset Qx)$ and $\Diamond(\forall x)(Sx \supset Px)$, unlike $\Diamond(\forall x)(Rx \supset Qx)$, are *finally derivable* from the premises (see below for the definition).

We now give the precise formulation of the proof theory for **COM**. Adding lines to a proof from $\Gamma^{\Box}$ is governed by the rules PREM, RU and RC:

PREM If $A \in \Gamma^{\Box}$, then one may add to the proof a line consisting of

- (i) the appropriate line number,
- (ii) A,
- (iii) "–",
- (iv) "PREM", and
- (v) $\emptyset$.

RU If $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathbf{S5}} B$, and $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 0)$ occur in the proof on the conditions $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ respectively, then one may add to the proof a line consisting of:

- (i) the appropriate line number,
- (ii) B,
- (iii) the line numbers of the A_i or "–" if $n = 0$,

(iv) "RU", and
(v) $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$.

RC At any point of the proof, one may, for any formula A of $\mathcal{L}$, add to the proof a line consisting of:

(i) the appropriate line number,
(ii) $\Diamond A$,
(iii) "$-$",
(iv) "RC", and
(v) $\{\neg\Diamond A\}$.

The marking of lines is governed by the following definition:

Definitie 20 *Marking for* **COM***: Line i is marked at stage s of a* **COM***-proof from $\Gamma^\Box$ iff, where Δ is the condition of line i, some $A \in \Delta$ has been* unconditionally *derived at stage s.*

In view of the marking definition, two notions of derivability may be defined: derivability at a stage (see above) and final derivability. The latter is defined as follows:

Definitie 21 *A formula A is* finally derived *on line i of a* **COM***-proof from $\Gamma^\Box$ iff (i) A is the second element of line i, (ii) line i is not marked in the proof, and (iii) line i will not be marked in any extension of the proof.*

As may be expected, the consequence relation is defined with respect to final derivability:

Definitie 22 $\Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{COM}} A$ *(A is finally derivable from $\Gamma^\Box$) iff A is finally derived on a line in a* **COM***-proof from $\Gamma^\Box$.*

As is proven in [20], the semantics of **COM** is, in a restricted way, sound and complete with respect to its proof theory:

Theorema 6 *Where A is a wff of $\mathcal{L}$, $\Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{COM}} \Diamond A$ iff $\Gamma^\Box \models_{\mathbf{COM}} \Diamond A$.*

B.3 Direct Proofs for COMPAT

In [20], the logic **COMPAT** is indirectly defined as follows:

Definitie 23 $\Gamma \vdash_{\mathbf{COMPAT}} A$ *iff* $\Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{COM}} \Diamond A$.

In view of the proof theory for **COM**, a direct proof theory for **COMPAT** can easily be obtained. It suffices to extend **CL** with the following conditional rule:

RC' At any point of the proof, one may, for any formula A of $\mathcal{L}$, add to the proof a line consisting of:

(i) the appropriate line number,
(ii) A,
(iii) "–",
(iv) "RC"', and
(v) $\{\neg A\}$.

and to formulate an appropriate marking definition.

The idea behind RC' is simple and nicely captures the intuition behind compatibility: we assume that A is compatible with the premises unless and until this assumption is proven to be false (that is, unless and until $\neg A$ is **CL**-derivable). In view of the meta-proofs, we shall, however, rely on a conditional rule that is slightly more general (and from which RC' may be derived). The idea will be that, whenever a disjunction $B \vee \bigvee(\Delta)$ is **CL**-derivable in the proof, B may be derived on the condition Δ.

Here are the generic rules for **COMPAT**-proofs:

PREM If $A \in \Gamma$, then one may add to the proof a line consisting of

(i) the appropriate line number,
(ii) A,
(iii) "–",
(iv) "PREM", and
(v) $\emptyset$.

RU If $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathbf{CL}} B$, and $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geq 0$) occur in the proof on the conditions $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ respectively, then one may add to the proof a line consisting of:

(i) the appropriate line number,
(ii) B,
(iii) the line numbers of the A_i or "–" if $n = 0$,
(iv) "RU", and
(v) $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$.

RC If $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathbf{CL}} B \vee \bigvee(\Delta)$, and $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geq 0$) occur in the proof on the conditions $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ respectively, then one may add to the proof a line consisting of:

(i) the appropriate line number,
(ii) B,
(iii) the line numbers of the A_i or "–" if $n = 0$,
(iv) "RC", and
(v) $\Delta \cup \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$.

The following rules are obviously derivable and lead to proofs that are more interesting from a heuristic point of view:

RD1 If A is derived in the proof on the condition $\{C_1, \ldots, C_n\}$ and $\neg A$ is derived on the condition $\emptyset$, then one may add to the proof a line consisting of

(i) the appropriate line number,
(ii) $\bigvee\{C_1, \ldots, C_n\}$,
(iii) the line numbers of A and $\neg A$,
(iv) "RD1", and
(v) $\emptyset$.

RD2 If A is derived in the proof on the condition $\{C_1, \ldots, C_n\}$ and $\neg A$ is derived on the condition $\{D_1, \ldots, D_m\}$, then one may add to the proof a line consisting of

(i) the appropriate line number,
(ii) $\bigvee(\{C_1, \ldots, C_n\} \cup \{D_1, \ldots, D_m\})$,
(iii) the line numbers of A and $\neg A$,
(iv) "RD2", and
(v) $\emptyset$.

The marking definition for **COMPAT** is somewhat different from that for **COM** and will be illustrated in the example below:

Definitie 24 *Marking for* **COMPAT***: Line i is marked at a stage of a proof from Γ iff, where Δ is the condition of line i, $\bigvee(\Delta)$ is unconditionally derived at that stage of the proof.*

As is the case for **COM**, a formula A is said to be derived at a stage s of a **COMPAT**-proof from Γ iff A is the second element of a non-marked line at stage s. Also the definitions of final derivability and of the consequence relation are analogous to those for **COM**:

Definitie 25 *A formula A is* finally derived *on line i of a* **COMPAT***-proof from Γ iff (i) A is the second element of line i, (ii) line i is not marked in the proof, and (iii) line i will not be marked in any extension of the proof.*

Definitie 26 $\Gamma \vdash_{\mathbf{COMPAT}} A$ *(A is finally derivable from Γ) iff A is finally derived on a line in a* **COMPAT***-proof from Γ.*

Here is the direct proof for the example from the previous section:

1	$(\forall x)(Qx \supset \neg Sx)$	–	PREM	$\emptyset$
2	$(\forall x)(Px \supset Rx)$	–	PREM	$\emptyset$
3	$Ra \wedge Sa$	–	PREM	$\emptyset$
4	$(\forall x)(Rx \supset Qx)$	–	RC	$\{\neg(\forall x)(Rx \supset Qx)\}$ $\boxed{8}$
5	$(\forall x)(Px \supset Qx)$	–	RC	$\{\neg(\forall x)(Px \supset Qx)\}$
6	$(\forall x)(Sx \supset Px)$	–	RC	$\{\neg(\forall x)(Sx \supset Px)\}$
7	$\neg Qa$	1, 3	RU	$\emptyset$
8	$\neg(\forall x)(Rx \supset Qx)$	3, 7	RU	$\emptyset$

Unlike what was the case for **COM**, **COMPAT** allows one to 'conjoin' different compatibility hypotheses. For instance, from the formulas on lines 5 and 6, one may derive:

9	$(\forall x)(Sx \supset Qx)$	5, 6	RU	$\{\neg(\forall x)(Sx \supset Px), \neg(\forall x)(Px \supset Qx)\}$

Thus, the proof theory for **COMPAT** is, in a sense, richer than that for **COM**. (In **COM**, it is not possible to derive $\lozenge(\forall x)(Sx \supset Qx)$ from $\lozenge(\forall x)(Px \supset Qx)$ and $\lozenge(\forall x)(Sx \supset Px)$.) That it is not too rich is warranted by the marking definition. Suppose, for instance, that we continue the proof as follows:

10	Pa	3, 6	RU	$\{\neg(\forall x)(Sx \supset Px)\}$
11	$(\forall x)(Px \supset \neg Sx)$	1, 5	RU	$\{\neg(\forall x)(Px \supset Qx)\}$
12	$\neg Pa$	3, 11	RU	$\{\neg(\forall x)(Px \supset Qx)\}$
13	$Pa \wedge \neg Pa$	10, 12	RU	$\{\neg(\forall x)(Sx \supset Px), \neg(\forall x)(Px \supset Qx)\}$

Although both Pa and $\neg Pa$ are compatible with the premises, $Pa \wedge \neg Pa$ is obviously not, and hence, should not be finally derivable from them. However, as soon as the following line is added to the proof, lines 9 and 13 are marked:

14	$\neg(\forall x)(Sx \supset Px) \vee \neg(\forall x)(Px \supset Qx)$	10,12	RD2	$\emptyset$

Note that, although both $(\forall x)(Sx \supset Px)$ and $(\forall x)(Px \supset Qx)$ are compatible with the premises (the formulas on lines 5 and 6 are finally derived), they are not *jointly* compatible with them. This is what the formula on line 14 teaches: in view of the premises, either $(\forall x)(Sx \supset Px)$ or $(\forall x)(Px \supset Qx)$ must be false.

In the rest of this section, we prove that the direct proof theory for **COMPAT** is equivalent to the indirect one from Definition 23. For the sake of generality, $A \vee \bigvee(\emptyset)$ will denote A.[6]

Lemma 6 *If, in a* **COMPAT***-proof from* Γ*,* A *occurs as the second element of line* i *and* Δ *as its fifth element, then* $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A \vee \bigvee(\Delta)$*.*

Bewijs The proof proceeds by induction on the number of the line at which A occurs. The lemma obviously holds if $i = 1$, for then, in view of the generic rules, $A \in \Gamma$ or $\vdash_{\mathbf{CL}} A \vee \bigvee(\Delta)$. Suppose that the lemma holds for all lines that precede i.

[6] The logic **COMPAT** is not the first adaptive logic for which a direct proof theory is designed. In [9], for instance, it is shown that the so-called Rescher-Manor consequence relations (the Free, Strong, Argued, C-based and Weak consequence relations) can be characterized by means of specific inconsistency-adaptive logics (which incorporate a paraconsistent negation as well as the classical one). The direct proof theories, that proceed entirely in the language of **CL**, can be found in [22]. An important difference with the present case is that the equivalence proof for **COMPAT** does not require that a correspondence is established between the indirect proofs and the direct ones.

Case 1: The third element of line i is "–". Analogous to the case where $i = 1$.

Case 2: The third element of line i is not "–". Suppose that the third element of i is $j_1, \ldots, j_n$ ($n \geq 1$) and that $B_1, \ldots, B_n$ are the second elements of lines $j_1, \ldots, j_n$. Both RU and RC warrant that $B_1, \ldots, B_n \vdash_{\mathbf{CL}} A \vee \bigvee(\Delta)$, and hence, that $\vdash_{\mathbf{CL}} ((B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \supset A) \vee \bigvee(\Delta)$. As the fifth elements of lines $j_1, \ldots, j_n$ are subsets of Δ, the supposition warrants that $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} B_i \vee \bigvee(\Delta)$ for every B_i, and hence, that $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \vee \bigvee(\Delta)$. But then, $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A \vee \bigvee(\Delta)$. ■

Theorema 7 $\Gamma \vdash_{\mathbf{COMPAT}} A$ *iff* $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A$ *or there is a non-empty set* Δ *such that* $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A \vee \bigvee(\Delta)$ *and* $\Gamma \nvdash_{\mathbf{CL}} \bigvee(\Delta)$.

Bewijs The right-left direction immediately follows by inspection of the proof theory: if $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A$, then $\Gamma \vdash_{\mathbf{COMPAT}} A$ in view of RU; if, for some non-empty set Δ, $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A \vee \bigvee(\Delta)$ and $\Gamma \nvdash_{\mathbf{CL}} \bigvee(\Delta)$, then $\Gamma \vdash_{\mathbf{COMPAT}} A$ in view of RC and the marking definition.

For the left-right direction, suppose that $\Gamma \vdash_{\mathbf{COMPAT}} A$. In that case, A is finally derived at some line j of a **COMPAT**-proof from Γ. Hence, where Δ is the fifth element of line j, $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A \vee \bigvee(\Delta)$ in view of Lemma 6.

It only remains to be shown that, if Δ is non-empty, then $\Gamma \nvdash_{\mathbf{CL}} \bigvee(\Delta)$. Suppose that Δ is non-empty and that $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} \bigvee(\Delta)$. As **CL** is compact, there is an extension of the proof in which $\bigvee(\Delta)$ occurs unconditionally. But then, line j is marked in that extension, and will remain marked in any further extension. This contradicts that A is finally derived at line j. ■

Theorema 8 $\Gamma \vdash_{\mathbf{COMPAT}} A$ *iff* $\Gamma \nvdash_{\mathbf{CL}} \neg A$ *or* $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} \bot$.

Bewijs For the left-right direction, suppose that $\Gamma \vdash_{\mathbf{COMPAT}} A$. Suppose further that $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} \neg A$ and that $\Gamma \nvdash_{\mathbf{CL}} \bot$. It follows, in view of Theorem 7, that (i) $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A$ or (ii) that, for some non-empty set Δ, $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} A \vee \bigvee(\Delta)$ and $\Gamma \nvdash_{\mathbf{CL}} \bigvee(\Delta)$. However, both (i) and (ii) are impossible in view of the supposition.

For the right-left direction, suppose first that $\Gamma \nvdash_{\mathbf{CL}} \neg A$. It follows, in view of $\vdash_{\mathbf{CL}} A \vee \neg A$, RC and the marking definition, that A is finally derived at some line in a **COMPAT**-proof from Γ, and hence, that $\Gamma \vdash_{\mathbf{COMPAT}} A$. The case where $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} \bot$ is obvious in view of RU. ■

Theorema 9 $\Gamma \vdash_{\mathbf{COMPAT}} A$ *iff* $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{COM}} \Diamond A$.

Bewijs Immediate in view of Theorem 5, Theorem 6, the Completeness of **CL** and Theorem 8. ■

B.4 In Conclusion

In this paper, we presented a direct proof theory for classical compatibility and showed that it is equivalent to the indirect one from [20]. Important open problems concern the design of a direct proof theory for paraconsistent compatibility (as studied in [33]) and the formulation of proof theories for other forms of ampliative reasoning. Given the central role that compatibility plays in ampliative reasoning, the results from the present paper should constitute a good point of departure for this.

Bijlage C

Het Regelsysteem PCI1 voor de Klassieke Oordeelslogica

Het regelsysteem **PCI1** is integraal overgenomen uit [5].

Structurele Regels

Premisse:

PREM: op gelijk welke plaats in het hoofdbewijs mag men een premisse neerschrijven.[1]

Hypothese:

HYP: op gelijk welke plaats in een bewijs mag men een willekeurige wff neerschrijven; hiermee begint men een nieuw subbewijs.

Reïteratie:

REIT: in een subbewijs mag men gelijk welke wff neerschrijven die voorkomt in het hoofdbewijs of in een subbewijs dat nog niet werd afgesloten.

Basisinferentieregels

Modus Ponens:

MP: $A \supset B,\ A\ /\ B$

Voorwaardelijk bewijs:

VB: als B de laatste wff is van een subbewijs dat begint met de hypothese A, dan mag men *uit dit subbewijs* besluiten tot $A \supset B$; het subbewijs is hiermee afgesloten.

Conjunctie:

CONJ: $A,\ B\ /\ A\&B$

[1] Theoretisch is er niets fout aan dat we premissen zouden invoeren in een subbewijs; het leidt echter gemakkelijk tot vergissingen.

Simplificatie:
SIM: $A\&B \; / \; A$
$A\&B \; / \; B$

Additie:
ADD: $A \; / \; A \vee B$
$B \; / \; A \vee B$

Dilemma:
DIL: $A \vee B,\ A \supset C,\ B \supset C \; / \; C$

Introductie van de gelijkwaardigheid:
GI: $A \supset B,\ B \supset A \; / \; A \equiv B$

Eliminatie van de gelijkwaardigheid:
GE: $A \equiv B \; / \; A \supset B$
$A \equiv B \; / \; B \supset A$

Dubbele negatie:
DN: $\sim\sim A \; / \; A$

Reductio ad Absurdum:
RAA: $A \supset B,\ A \supset \sim B \; / \; \sim A$

Afgeleide Inferentieregels

Transitiviteit:
TRA: $A \supset B,\ B \supset C \; / \; A \supset C$

Conjunctie in het implicatum (introductie en eliminatie):
ICI: $A \supset B, A \supset C \; / \; A \supset (B\&C)$
ICE: $A \supset (B\&C) \; / \; A \supset B$
$A \supset (B\&C) \; / \; A \supset C$

Disjunctie in het implicans (introductie en eliminatie):
DII: $A \supset C,\ B \supset C \; / \; (A \vee B) \supset C$
DIE: $(A \vee B) \supset C \; / \; A \supset C$
$(A \vee B) \supset C \; / \; B \supset C$

Dilemma-varianten:
DIL: $A \vee B,\ A \supset C \; / \; C \vee B$
$A \vee B,\ B \supset C \; / \; A \vee C$

Permutatie, associatie en contractie van disjuncties:
DPAC: Willekeurig veel toepassingen van permutatie:
$\ldots \vee (A \vee B) \vee \ldots \; / \; \ldots \vee (B \vee A) \vee \ldots$
associatie:
$\ldots \vee ((A \vee B) \vee C) \vee \ldots \; / \; \ldots \vee (A \vee (B \vee C)) \vee \ldots$
(en omgekeerd) en contractie:
$\ldots \vee (A \vee A) \vee \ldots \; / \; \ldots \vee A \vee \ldots$ (en omgekeerd)
op een gegeven formule.

Distributiviteit:

DIST: $A\&(B \vee C)$ / $(A\&B) \vee (A\&C)$ en omgekeerd
$(A \vee B)\&C$ / $(A\&C) \vee (B\&C)$ en omgekeerd
$A \vee (B\&C)$ / $(A \vee B)\&(A \vee C)$ en omgekeerd
$(A\&B) \vee C$ / $(A \vee C)\&(B \vee C)$ en omgekeerd

Modus Tollens:

MT: $A \supset B$, $\sim B$ / $\sim A$

Contrapositie:

CPOS: $A \supset B$ / $\sim B \supset \sim A$

RAA van een hypothese:

RAH: *Uit een subbewijs* dat begint met de hypothese A en waarin B en $\sim B$ voorkomen, mag je tot $\sim A$ besluiten; het subbewijs is hiermee afgesloten.

Disjunctief syllogisme:

DS: $A \vee B$, $\sim A$ / B
$A \vee B$, $\sim B$ / A

Converse van Dubbele Negatie:

DN: A / $\sim\sim A$

Negatie van de conjunctie:

NC: $\sim(A\&B)$ / $\sim A \vee \sim B$

Negatie van de disjunctie:

ND: $\sim(A \vee B)$ / $\sim A$
$\sim(A \vee B)$ / $\sim B$

Negatie van de implicatie:

NI: $\sim(A \supset B)$ / A
$\sim(A \supset B)$ / $\sim B$

Negatie van de gelijkwaardigheid:

NG: $\sim(A \equiv B)$ / $A \vee B$
$\sim(A \equiv B)$ / $\sim A \vee \sim B$

Bibliografie

[1] Alan Ross Anderson en Nuel D. Belnap, Jr. *Entailment. The Logic of Relevance and Necessity*, volume 1. Princeton University Press, 1975.

[2] Diderik Batens. Paraconsistent extensional propositional logics. *Logique et Analyse*, 90–91:195–234, 1980.

[3] Diderik Batens. Dynamic dialectical logics. In Graham Priest en Richard Routley en Jean Norman, editor, *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent*, pages 187–217. Philosophia Verlag, München, 1989.

[4] Diderik Batens. Natural heuristics for proof construction. Part I: Classical propositional logic. *Logique et Analyse*, 127–128:337–363, 1989. Appeared 1992.

[5] Diderik Batens. *Logicaboek. Praktijk en theorie van het redeneren*. Garant, Antwerpen/Apeldoorn, 1992. 2: 1993; 3: 1996; 4: 1999; 5: 2002.

[6] Diderik Batens. Blocks. The clue to dynamic aspects of logic. *Logique et Analyse*, 150–152:285–328, 1995. Appeared 1997.

[7] Diderik Batens. Inconsistency-adaptive logics. In Ewa Orłowska, editor, *Logic at Work. Essays Dedicated to the Memory of Helena Rasiowa*, pages 445–472. Physica Verlag (Springer), Heidelberg, New York, 1999.

[8] Diderik Batens. A survey of inconsistency-adaptive logics. In Diderik Batens, Chris Mortensen, Graham Priest, and Jean Paul Van Bendegem, editors, *Frontiers of Paraconsistent Logic*, pages 49–73. Research Studies Press, Baldock, UK, 2000.

[9] Diderik Batens. Towards the unification of inconsistency handling mechanisms. *Logic and Logical Philosophy*, 8:5–31, 2000. Appeared 2002.

[10] Diderik Batens. A general characterization of adaptive logics. *Logique et Analyse*, 173–175:45–68, 2001. Appeared 2003.

[11] Diderik Batens. On a partial decision method for dynamic proofs. In Hendrik Decker, Jørgen Villadsen, and Toshiharu Waragai, editors,

PCL 2002. Paraconsistent Computational Logic, pages 91–108. (= *Datalogiske Skrifter* vol. 95), 2002. Also available as cs.LO/0207090 at `http://arxiv.org/archive/cs/intro.html`.

[12] Diderik Batens. Adaptieve logica's. Een precieze benadering van vertrouwde maar door logici verwaarloosde redeneervormen. *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, 95:174–189, 2003.

[13] Diderik Batens. A formal approach to problem solving. In Claudio Delrieux and Javier Legris, editors, *Computer Modeling of Scientific Reasoning*, pages 15–26. Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca, Argentina, 2003.

[14] Diderik Batens. *Prospective dynamic proofs 1.* Centrum voor Logica en Wetenschapsfilosofie, Universiteit Gent, 2003. Vrij beschikbaar op `http://logica.ugent.be/centrum/writings/mijnprograms.php`.

[15] Diderik Batens. A diagrammatic proof search procedure as part of a formal approach to problem solving. To appear.

[16] Diderik Batens. A paraconsistent proof procedure based on classical logic. To appear.

[17] Diderik Batens. On a logic of induction. In Roberto Festa en Atocha Aliseda en Jeanne Peijnenburg, editor, *Confirmation, Empirical Progress, and Truth Approximation. Essays in Debate with Theo Kuipers*, Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities. Rodopi, Amsterdam, in print.

[18] Diderik Batens. The need for adaptive logics in epistemology. To appear.

[19] Diderik Batens en Lieven Haesaert. On classical adaptive logics of induction. *Logique et Analyse*, 173–175:255–290, 2001. Appeared 2003.

[20] Diderik Batens en Joke Meheus. The adaptive logic of compatibility. *Studia Logica*, 66:327–348, 2000.

[21] Diderik Batens en Dagmar Provijn. Pushing the search paths in the proofs. A study in proof heuristics. *Logique et Analyse*, 173–175:113–134, 2001. Appeared 2003.

[22] Diderik Batens en Timothy Vermeir. Direct dynamic proofs for the Rescher–Manor consequence relations: The flat case. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 12:63–84, 2002.

[23] George S. Boolos en Richard J. Jeffrey. *Computability and Logic.* Cambridge University Press, 1989. (Third edition).

[24] Rudolf Carnap. *Logical Foundations of Probability.* University of Chicago Press, Chicago, 1950.

[25] Dov M. Gabbay. *Labelled Deductive Systems, volume 1.* Clarendon Press, Oxford, 1996.

[26] Dov M. Gabbay en Nicola Olivetti. *Goal-Directed Proof Theory.* Kluwer, Dordrecht, 2000.

[27] Jean Goubault-Larrecq en Ian Mackie. *Proof Theory and Automated Deduction.* Kluwer, Dordrecht, 1997.

[28] Jaakko Hintikka. *Inquiry as Inquiry: A Logic of Scientific Discovery.* Kluwer, Dordrecht, 1999.

[29] Jaakko Hintikka. Is logic the key to all good reasoning? In *Inquiry as Inquiry: A Logic of Scientific Discovery* [28], pages 1–24.

[30] Jaakko Hintikka. The role of logic in argumentation. In *Inquiry as Inquiry: A Logic of Scientific Discovery* [28], pages 25–46.

[31] John J. Kelly. *The Essence of Logic.* Prentice Hall, London, 1997.

[32] Donald W. Loveland. *Automated Theorem Proving: A Logical Basis.* North-Holland Publishing Company, New York, 1978.

[33] Joke Meheus. Paraconsistent compatibility. *Logique et Analyse.* To appear.

[34] Joke Meheus en Liza Verhoeven en Maarten Van Dyck en Dagmar Provijn. Ampliative adaptive logics and the foundation of logic-based approaches to abduction. In Lorenzo Magnani en Nancy J. Nersessian en Claudio Pizzi, editor, *Logical and Computational Aspects of Model-Based Reasoning*, pages 39–71. Kluwer, Dordrecht, 2002.

[35] Neil V. Murray. Completely non-clausal theorem proving. *Artificial Intelligence*, 18:67–85, 1982.

[36] Frederic D. Portoraro. Strategic construction of Fitch-style proofs. *Studia Logica*, 60:45–66, 1998.

[37] Dagmar Provijn. How to obtain elegant fitch-style proofs from goal directed ones. In *Proceedings of the Fourtheenth Belgium-Netherlands Conference on Artificial Intelligence*, pages 243–250.

[38] Dagmar Provijn en Joke Meheus. Direct dynamic proofs for classical compatibility. *Logique et Analyse.* In print.

[39] Kurt Schütte. *Beweistheorie.* Springer, Berlin, 1960.

[40] Raymond M. Smullyan. *First Order Logic.* Dover, New York, 1995. Original edition: Springer, 1968.

[41] Andrzej Wiśniewski. Socratic Proofs. *Journal of Philosophical Logic*, 33:299–326, 2004.

[42] Andrzej Wiśniewski en Vasilyi Shangin. Socratic Proofs for Quantifiers. 2004.