Is er een diepe kloof tussen de heuristiek en de inferentieregels van een bewijstheorie? Een poging tot integratie.*

Dagmar Provijn
Centre for Logic and Philosophy of Science
Universiteit Gent, Belgium
Dagmar.Provijn@rug.ac.be

11 september 2002

Samenvatting

In dit artikel wens ik in te gaan tegen het diepe onderscheid dat Hintikka voorstelt tussen de 'definitory' -en 'strategic rules' van een bewijstheorie. Ik doe dit door een integratie voor te stellen tussen de inferentieregels en de heuristiek van het formeel systeem **Pc** uit [5] dat toelaat doelgerichte en efficiënte bewijzen te maken.

1 Inleiding

Doorheen het werk van Hintikka loopt een duidelijke kritiek tegen de stiefmoederlijke behandeling van heuristische regels en strategieën in zowel de ontwikkeling als het onderwijzen van logica — zie [7], [8] en [9]. Het merendeel van de logicahandboeken beperkt zich tot de studie van wat hij de 'definitory rules' noemt (de inferentieregels van een formeel systeem), die enkel aangeven welke stappen zijn toegestaan in elk stadium van een bewijs. Een dergelijke aanpak legt de klemtoon echter uitsluitend op het vermijden van foute inferentiestappen in een redeneerproces. Het maken van doelgerichte en efficiënte bewijzen vraagt echter meer dan dat. Zij vereisen de ontwikkeling van 'strategic rules' (heuristische regels), die moeten verduidelijken welke inferentiestap is aangewezen op een specifiek stadium van het bewijs. Onderzoek hieromtrent is afgezien van een aantal uitzonderingen jammergenoeg sterk verwaarloosd. Om aan die behoefte te voldoen ontwikkelde Diderik Batens in [1] een natuurlijke heuristiek[1] voor het construeren van Fitch-stijl bewijzen binnen de klassieke logica. Deze werd tevens, vanuit pedagogisch standpunt opgenomen in [2]. De blijvende interesse voor het expliciteren en verfijnen van doelgerichte zoekprocessen en

*Het onderzoek voor dit artikel is gesubsidiëerd door het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek Vlaanderen, en indirect door de Vlaamse Minister verantwoordelijk voor Wetenschap en Technologie (contract BIL98/37).

[1]Een natuurlijke heuristiek dient doelgericht en in zo hoog mogelijke mate algoritmisch te zijn en moet tevens inzichten in het zoekproces naar bewijzen incorporeren die verder kunnen worden aangevuld en verfijnd.

de ontwikkeling van technieken voor de constructie van dynamische bewijzen in de context van het adaptief programma – zie [3] – hebben geresulteerd in de vorming van een bewijsformaat dat toelaat zoekstappen op te nemen in de bewijzen zelf en dat vergezeld van een eenduidige heuristiek resulteert in uiterst doelgerichte en efficiënte bewijzen voor de klassieke propositionele logica — zie [5]. Hierbij wijken de auteurs echter af van de opvattingen die Hintikka verder heeft betreffende de eigenschappen van 'definitory rules' en 'strategic rules'. Hij stelt dat de laatste eerder als principes dienen te worden gevat, afgeleid van een alomvattende strategie waarbij elke heuristische stap verdere stappen in rekening dient te houden. Dit wijkt duidelijk af van de stap-voor-stap toepassing van 'definitory rules'. In tegenstelling tot die laatste kan een verzameling optimale 'heuristische principes' dan ook niet recursief worden gedefiniëerd. De in [5] geformuleerde heuristiek en het formeel systeem **Pc** leveren echter een beslissingmethode voor $A_1, \ldots A_n \vdash B$ en een positieve test voor $\Gamma \vdash A$, niettegenstaande de algoritmische formulering van de heuristische regels.[2] Verder is aangetoond dat beide 'juist' en 'volledig' zijn ten opzichte van de semantiek van de klassieke propositionele logica. Ik dien er op te wijzen dat dit alles is gesitueerd rond één specifieke functie van bewijzen, namelijk aantonen dat een conclusie G afleidbaar is uit een verzameling premissen Γ.[3] Het is mijn bedoeling een verdere integratie tussen de inferentieregels van het formeel systeem **Pc** en de erbij geformuleerde heuristiek door te voeren om zodoende aan te tonen dat het onderscheid tussen beide soorten regels minder diep is dan Hintikka laat vermoeden.

2 Hintikka's vooronderstelling en hoe ze te omzeilen

Een belangrijke vooronderstelling die Hintikka doet besluiten tot de diepe kloof tussen 'definitory rules' and 'strategic rules' vloeit voort uit het vasthouden aan abstracte en statische meta-theoretische eigenschappen van de klassieke logica. Meer specifiek gaat het om het vooroordeel dat de inferentieregels moeten toelaten dat elke afleidbare formule uit een verzameling premissen Γ in gelijk welk bewijs uit Γ moet afleidbaar zijn. Deze vooronderstelling is echter reeds opgegeven in [5] door strengere eisen te stellen betreffende bewijsformaat en inferentieregels. Er is tevens aangetoond dat dit geen aanleiding geeft tot het wijzigen van de gevolgverzameling $Cn(\Gamma)$ en de relatie ten opzichte van de semantiek van de klassieke propositionele logica. Hoewel de heuristiek er afzonderlijk wordt voorgesteld, kan ik er op wijzen dat enkele heuristische principes reeds zijn geïmplementeerd in het specifieke bewijsformaat van **Pc**.

Het bewijsformaat laat toe heuristische stappen op te nemen in het bewijs. Dit wordt geïllustreerd aan de hand van een bewijsfragment met conclusie q en de volgende premisse behorend tot Γ:

i	$p \supset q$	Prem	$\emptyset$

[2] De **P** verwijst hierbij naar de klassieke propositionele logica en de **c** naar het conditionele element in het bewijsformaat.

[3] In het verdere verloop van het artikel noem ik G de conclusie van het bewijs, zelfs als G niet afleidbaar is uit Γ.

In een traditioneel bewijs vergt de analyse van deze premisse een zoekproces naar p waarbij verschillende stappen niet zijn opgenomen in het bewijs zelf. Ze vergen als het ware enkele aantekeningen in de kantlijn van het bewijs. In het doelgerichte bewijsformaat wordt de premisse echter als volgt geanalyseerd:

j	q	i	$\supset$E	$\{p\}$

Deze lijn wordt gelezen als: q is afleidbaar uit de premissen op voorwaarde dat p eruit afleidbaar is. Indien ook $(r \vee s) \supset p$ en r elementen zijn van Γ gaat het bewijs als volgt verder:

k	$(r \vee s) \supset p$		Prem	$\emptyset$
l	p	k	$\supset$E	$\{r \vee s\}$
m	p	l	C$\vee$E	$\{r\}$
n	r		Prem	$\emptyset$
o	p	m, n	Trans	$\emptyset$

De premisse op lijn 'k' wordt ingevoerd omdat p eruit afleidbaar is indien $r \vee s$ afleidbaar is. Om dit laatste af te leiden is het echter voldoende r of s af te leiden waardoor de conditie op lijn 'l' verder kan geanalyseerd worden indien $r \vee s$ zelf niet afleidbaar is uit de premissen. De regel 'Trans' laat toe transitiviteit toe te passen op de condities. De dubbele functie van de condities zal de lezer ondertussen wel duidelijk zijn: (i) ze vertellen ons dat een bepaalde formule afleidbaar is uit de premissen indien de formules in de conditie dat ook zijn en (ii) vervolgens maakt ze duidelijk naar welke formules we moeten zoeken op een bepaald stadium van het bewijs om de conclusie G te kunnen afleiden. Ik dien er verder op te wijzen dat elke lijn in een bewijs het volgende uitdrukt in verband met afleidbaarheid uit de premissen: A_Δ is afleidbaar uit een verzameling premissen Γ als en alleen als $\Gamma \cup \Delta \vdash A$ (A_Δ geeft aan dat de formule A is afgeleid onder de conditie Δ).

Of een formule al dan niet afleidbaar is uit de premissen kan eenvoudig worden bepaald aan de hand van de notie 'positief deel van een formule' die als volgt wordt gedefiniëerd:

(i) A is een positief deel van elk van de volgende: A, $A \wedge B$, $B \wedge A$, $A \vee B$, $B \vee A$, and $B \supset A$;
(ii) A is een negatief deel van $\sim\!A$ en $A \supset B$;
(iii) A is zowel een positief als een negatief deel van $A \equiv B$ en $B \equiv A$;
(iv) als A een negatief deel is van B, dan is $\sim\!A$ een positief deel van B;
(v) als A een positief deel is van B en B is een positief deel van C, dan is A een positief deel van C;
(vi) als A een positief deel is van B en B is een negatief deel van C, dan is A een negatief deel van C;
(vii) als A een negatief deel is van B en B is een positief deel van C, dan is A een negatief deel van C;
(viii) als A een negatief deel is van B en B is een negatief deel van C, dan is A een positief deel van C.

De constructie van een bewijs vraagt in eerste instantie dat enkele formules worden geanalyseerd en dat verschillende formules of subformules worden herkend als zijnde relevant voor het afleiden van de conclusie G. In functie hiervan laat het bewijsformaat toe enkel analyserende inferentieregels op te nemen in **Pc**. Dit komt erop neer dat ze in eerste instantie informatief zijn en geen niet-informatieve tussenstappen verbergen. Een stap is informatief als en alleen als hij een verdere analyse van de premissen vereist. Semantisch gezien komt dit erop neer dat de verzameling modellen van de premissen worden ingeperkt tot een deelverzameling van de modellen op een vorig stadium van het bewijs — i.e. het nummer van de laatst toegevoegde lijn. Dit betekent dat de introductie van een premisse tevens een informatieve stap is. Er dient echter op gewezen te worden dat analyserende regels toch niet-informatieve toepassingen kunnen hebben. De regel 'Simplificatie' is een analyserende regel, maar indien hij wordt toegepast om q af te leiden uit de premisse $p \wedge q$ wanneer p er reeds eerder uit is afgeleid, dan gaat dit om een niet-informatieve toepassing van de regel. Toch dient dit duidelijk onderscheiden te worden van de stap waarbij $p \vee s$ wordt afgeleid door middel van de niet-analyserende regel 'Additie'. De afleiding van q had namelijk ook kunnen gebeuren voor die van p, daar waar de afleiding van $p \vee s$ in geen geval informatief kan zijn.[4]

Alvorens de integratie uit te voeren beschrijf ik de inferentieregels en de heuristiek van het formeel systeem **Pc** opdat de lezer zich een beeld kan vormen waarop de integratie van toepassing is.

Doel	G mag worden geïntroduceerd onder de conditie $\{G\}$.
Prem	Elke premisse mag worden geïntroduceerd onder de conditie $\emptyset$.

Formule Analyserende Regels (FAR):

$$\supset\text{E} \quad \frac{(A \supset B)_\Delta}{B_{\Delta\cup\{A\}} \quad {\sim}A_{\Delta\cup\{\sim B\}}} \qquad \sim\supset\text{E} \quad \frac{\sim(A \supset B)_\Delta}{A_\Delta \quad {\sim}B_\Delta}$$

$$\vee\text{E} \quad \frac{(A \vee B)_\Delta}{A_{\Delta\cup\{\sim B\}} \quad B_{\Delta\cup\{\sim A\}}} \qquad \sim\vee\text{E} \quad \frac{\sim(A \vee B)_\Delta}{{\sim}A_\Delta \quad {\sim}B_\Delta}$$

$$\wedge\text{E} \quad \frac{(A \wedge B)_\Delta}{A_\Delta \quad B_\Delta} \qquad \sim\wedge\text{E} \quad \frac{\sim(A \wedge B)_\Delta}{(\sim A \vee \sim B)_\Delta}$$

$$\equiv\text{E} \quad \frac{(A \equiv B)_\Delta}{(A \supset B)_\Delta \quad (B \supset A)_\Delta} \qquad \sim\equiv\text{E} \quad \frac{\sim(A \equiv B)_\Delta}{(A \vee B)_\Delta \quad (\sim A \vee \sim B)_\Delta}$$

$$\sim\sim\text{E} \quad \frac{\sim\sim A_\Delta}{A_\Delta}$$

Conditie Analyserende Regels (CAR):

[4] Voor een uitgebreide bespreking van informatieve stappen en analyserende regels verwijs ik de lezer naar [4]. Hierin wordt gebruik gemaakt van het bewijsformaat en de inferentieregels van **Pc** om initiële condities af te leiden uit een explanandum en een specifieke theorie tijdens een verklaringsproces. In dit artikel wordt tevens een eerste integratie van heuristische principes uitgewerkt.

C⊃E $\dfrac{A_{\Delta\cup\{B\supset C\}}}{A_{\Delta\cup\{C\}} \quad A_{\Delta\cup\{\sim B\}}}$ C∼⊃E $\dfrac{A_{\Delta\cup\{\sim(B\supset C)\}}}{A_{\Delta\cup\{B,\sim C\}}}$

C∨E $\dfrac{A_{\Delta\cup\{B\vee C\}}}{A_{\Delta\cup\{B\}} \quad A_{\Delta\cup\{C\}}}$ C∼∨E $\dfrac{A_{\Delta\cup\{\sim(B\vee C)\}}}{A_{\Delta\cup\{\sim B,\sim C\}}}$

C∧E $\dfrac{A_{\Delta\cup\{B\wedge C\}}}{A_{\Delta\cup\{B,C\}}}$ C∼∧E $\dfrac{A_{\Delta\cup\{\sim(B\wedge C)\}}}{A_{\Delta\cup\{\sim B\}} \quad A_{\Delta\cup\{\sim C\}}}$

C≡E $\dfrac{A_{\Delta\cup\{B\equiv C\}}}{A_{\Delta\cup\{B,C\}} \quad A_{\Delta\cup\{\sim B,\sim C\}}}$ C∼≡E $\dfrac{A_{\Delta\cup\{\sim(B\equiv C)\}}}{A_{\Delta\cup\{\sim B,C\}} \quad A_{\Delta\cup\{B,\sim C\}}}$

C∼∼E $\dfrac{A_{\Delta\cup\{\sim\sim B\}}}{A_{\Delta\cup\{B\}}}$

In tegenstelling tot de vorige regels hebben de regels ‘Transitiviteit’ en ‘Uitgesloten Derde’ — voor het afsluiten van een bewijs — nood aan twee premissen:

Trans $\dfrac{\begin{array}{c}A_{\Delta\cup\{B\}}\\ B_{\Delta'}\end{array}}{A_{\Delta\cup\Delta'}}$ UD $\dfrac{\begin{array}{c}A_{\Delta\cup\{B\}}\\ A_{\Delta'\cup\{\sim B\}}\end{array}}{A_{\Delta\cup\Delta'}}$

De enige niet-analyserende regel heeft betrekking op ‘Ex Falso Quodlibet’. Doordat we te maken hebben met de klassieke logica is dit onvermijdbaar. Deze regel is echter enkel van toepassing indien geen enkele van de vorige nog kan worden aangewend. Hierbij steun ik op het volgende: indien de negatie van een premisse afleidbaar is uit de verzameling premissen Γ, dan weten we dat Γ inconsistent is.

EFQ Als $A \in \Gamma$, dan mag G worden geïntroduceerd onder de conditie $\{\sim A\}$.

De heuristiek is ontwikkeld om aan de hand van de zonet geformuleerde regels efficiënte doelgerichte bewijzen te construeren voor $\Gamma \vdash G$. Daarom vereist de heuristiek dat elk bewijs wordt gestart met het neerschrijven van $G_{\{G\}}$ door de Doel-regel zodat enkel relevante premissen kunnen worden geïntroduceerd — i.e. premissen die de formule G of subformules ervan als positief deel bevatten — en opdat elke zoek-stap in het teken zou staan van het zoekproces naar de conclusie G. Ik dien verder op te merken dat de Doel-regel niet alleen is geformuleerd om de zoek-stappen op te nemen in de bewijzen zelf, maar tevens noodzakelijk is voor het bewijzen van stellingen in het formeel systeem **Pc**. Om redundante zoek-stappen te vermijden steun ik op een aantal markeringsdefinities die net als de condities hun oorsprong vinden in de dynamische bewijzen van het adaptieve-logica programma. Gemarkeerde lijnen worden niet langer aangewend voor de toepassing van inferentieregels.[5] De eerste markeringsdefinitie behandelt onnodig complexe zoek-paden:

M1 Wanneer A is afgeleid op de conditie Δ op lijn i, dan is lijn i D-gemarkeerd als $A \in \Delta$ of er is een lijn op dewelke A is afgeleid op de conditie Δ' en $\Delta' \subset \Delta$.

[5] Markeringsdefinitie M2 vormt een belangrijke aanvulling ten opzichte van de markeringsdefintie M1 die is opgenomen in [5]. Deze is afkomstig uit [10].

De tweede markeringsdefinitie behandelt lijnen die aanleiding geven tot toepassingen van 'Ex Falso Quodlibet'. Daar we dit enkel willen toelaten wanneer de andere zoek-paden falen, behouden we deze voor een behandeling door middel van de 'EFQ-regel'.

M2 Wanneer A is afgeleid op de conditie Δ op lijn i, en geen enkele toepassing van 'EFQ' komt voor in het bewijs , dan is lijn i I-gemarkeerd als Δ inconsistent is $(B, \sim B \in \Delta)$ of, $\sim B$ is afgeleid op een lege conditie voor een $B \in \Delta$.

Alvorens de instructies van de heuristiek weer te geven, vermeld ik vijf restricties die betrekking hebben op hun toepassing. R1 en R2 zorgen voor een minder complexe formulering van de instructies, R3 maakt dat het proces zo doelgericht mogelijk verloopt en de laatste heeft betrekking op de toepassing van 'EFQ' voor oneindige Γ.

R1 Formule analyserende regels worden niet toegepast of formules geïntroduceerd door de Doel-regel.
R2 Geen enkele regel wordt aangewend om een gemarkeerde of niet-gemarkeerde lijn te herhalen.
R3 Elke nieuwe zoek-stap start bij een conditie uit de laatste niet-gemarkeerde lijn.[6]
R4 Als Γ oneindig is, dan wordt een bewijs voor $\Gamma \vdash G$ als volgt gedefinieerd in termen van een gelimiteerde reeks $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ uit Γ: eerst worden de instructies toegepast op Γ_1; als de procedure stopt wordt het bewijs vervolgd door de toepassing van de instructies op Γ_2; etc.

De instructies zijn weergegeven in volgorde van toepassing. Indien een instructie kan worden uitgevoerd wordt een lijn toegevoegd aan het bewijs en keren we terug naar I1. Indien dit niet het geval is, gaan we door naar de volgende instructie.[7]

I0 Introduceer $G_{\{G\}}$ door middel van de Doel-regel.
I1 Leid $G_\emptyset$ af met om het even welke regel.[8]
I2 Pas UD toe indien dit aanleiding geeft tot het D-markeren van een lijn.
I3 Pas Trans toe indien dit aanleiding geeft tot het D-markeren van een lijn.
I4 Pas een formule analyserende regel toe om A_Δ te bekomen, op een lijn i, op voorwaarde dat $B \in \Sigma_{i-1}$ een positief deel is van A.
I5 Pas Prem toe om $A_\emptyset$ te bekomen, op een lijn i, op voorwaarde dat $B \in \Sigma_{i-1}$ een positief deel is van A.
I6 Pas een conditie analyserende regel toe.
I7 Pas Trans toe om G_Δ te bekomen(voor een Δ), op voorwaarde dat Δ niet inconsistent is.
I8 Pas UD toe om G_Δ te bekomen, op voorwaarde dat Δ niet inconsistent is.
I9 Pas EFQ toe.

[6] Deze nieuwe restrictie maakt het zoekproces meer doelgericht dan het resultaat uit [5].
[7] Met Σ verwijzen we naar de conditie op de aangegeven lijn van het bewijs.
[8] Met andere woorden, doorloop de verschillende regels en ga na of één ervan resulteert in het afleiden van $G_\emptyset$.

3 De integratie

Het zal de lezer vast zijn duidelijk geworden dat de heuristiek in hoofdzaak verwijst naar de volgorde van toepassing van de verschillende regels. De integratie zal dan ook vooral hierop steunen voor het stellen van strengere eisen aan de inferentieregels. Zowel de markeringsregels als restricties R1-R4 blijven behouden.

Een eerste eis die wordt gesteld aan de inferentieregels is dat ze worden uitgevoerd in de volgorde waarop ze worden weergegeven. Na elke toepassing van een regel keren we terug naar de 'UD-regel'. De 'Doel-regel' wordt als volgt aangepast:

Doel G wordt geïntroduceerd onder de conditie $\{G\}$ op de eerste lijn van het bewijs.

Na de 'Doel-regel' volgt de toepassing van de 'UD-regel' voor zover deze aanleiding geeft tot het D-markeren van een lijn. Deze restrictie kan worden ingebouwd door de volgende eis te stellen aan de eerder vermelde regel:

UD $$\frac{\begin{array}{c} A_{\Delta \cup \{B\}} \\ A_{\Delta' \cup \{\sim B\}} \end{array}}{A_{\Delta \cup \Delta'} \text{ (met } \Delta' \subseteq \Delta \text{ of } \Delta \subseteq \Delta'\text{)}}$$

Op dit stadium dient de 'Trans-regel' te leiden tot de eliminatie van een formule in een conditie zodat hij als volgt dient te worden ingeperkt:

Trans $$\frac{\begin{array}{c} A_{\Delta \cup \{B\}} \\ B_{\emptyset} \end{array}}{A_{\Delta}}$$

De 'Trans-regel' wordt gevolgd door de formule analyserende regels die allen aan de restrictie moeten voldoen zoals hier weergegeven voor de regel $\supset$E:

$\supset$E $$\frac{(A \supset B)_{\Delta} \text{ op lijn } i}{B_{\Delta \cup \{A\}} \quad \sim A_{\Delta \cup \{\sim B\}} \text{ met } C \in \Sigma_{i-1} \text{ een positief deel van } B \text{ of } \sim A}$$

De 'Prem-regel' dient te worden aangepast opdat enkel relevante premissen zouden worden geïntroduceerd:

Prem Een premisse A mag worden geïntroduceerd onder de conditie $\emptyset$, op een lijn i, op voorwaarde dat $B \in \Sigma_{i-1}$ een positief deel is van A.

Conditie analyserende regels zijn aan geen verdere restricties gebonden en worden dan ook toegepast zoals eerder weergegeven, na toepassing van de 'Premregel'.

Na de conditie analyserende regels volgen opnieuw de 'Trans' -en 'UD-regel', maar nu in de algemene vorm:

Trans $$\frac{\begin{array}{c} A_{\Delta \cup \{B\}} \\ B_{\Delta'} \end{array}}{A_{\Delta \cup \Delta'} \text{ met } \Delta \cup \Delta' \text{ niet inconsistent}}$$

UD $$\frac{\begin{array}{c} A_{\Delta \cup \{B\}} \\ A_{\Delta' \cup \{\sim B\}} \end{array}}{A_{\Delta \cup \Delta'} \text{ met } \Delta \cup \Delta' \text{ niet inconsistent}}$$

De 'EFQ-regel' blijft ongewijzigd en wordt slechts toegepast indien de vorige regels falen.

Om af te sluiten geef ik nog een bewijs voor $\Gamma = \{r \supset p, s \supset p, r \vee s, q\}$ en $G = p \wedge q$ ter illustratie:

1	$p \wedge q$		Doel	$\{p \wedge q\}$	
2	$p \wedge q$	1	C$\wedge$E	$\{p, q\}$	$D13$
3	$r \supset p$		Prem	$\emptyset$	
4	p	3	$\supset$E	$\{r\}$	
5	$r \vee s$		Prem	$\emptyset$	
6	r	5	$\vee$E	$\{\sim s\}$	
7	$s \supset p$		Prem	$\emptyset$	
8	$\sim s$	7	$\supset$E	$\{\sim p\}$	
9	p	7	$\supset$E	$\{s\}$	
10	s	5	$\vee$E	$\{\sim r\}$	
11	$\sim r$	3	$\supset$E	$\{\sim p\}$	
12	q		Prem	$\emptyset$	
13	$p \wedge q$	2, 12	Trans	$\{p\}$	$D16$
14	p	4, 6	Trans	$\{\sim s\}$	
15	p	9, 14	UD	$\emptyset$	
16	$p \wedge q$	13, 15	Trans	$\emptyset$	

Referenties

[1] Diderik Batens. Natural heuristics for proof construction. Part I: Classical propositional logic. *Logique et Analyse*, 127–128:337–363, 1989. Appeared 1992.

[2] Diderik Batens. *Logicaboek. Praktijk en theorie van het redeneren.* Garant, Leuven/Apeldoorn, 1992.

[3] Diderik Batens. Inconsistency-adaptive logics. In Ewa Orłowska, editor, *Logic at Work. Essays Dedicated to the Memory of Helena Rasiowa*, pages 445–472. Physica Verlag (Springer), Heidelberg, New York, 1999.

[4] Diderik Batens and Joke Meheus. On the logic and pragmatics of the process of explanation. In Mika Kiikeri and Petri Ylikoski, editors, *Explanatory Connections. Electronic Essays Dedicated to Matti Sintonen.* `http://www.valt.helsinki.fi/kfil/matti/`, 2001. 22 pp.

[5] Diderik Batens en Dagmar Provijn. Pushing the search paths in the proofs. A study in proof heuristics. to appear.

[6] Jaakko Hintikka. *Inquiry as Inquiry: A Logic of Scientific Discovery.* Kluwer, Dordrecht, 1999.

[7] Jaakko Hintikka. Is logic the key to all good reasoning. In *Inquiry as Inquiry: A Logic of Scientific Discovery* [6], pages 1–24.

[8] Jaakko Hintikka. The role of logic in argumentation. In *Inquiry as Inquiry: A Logic of Scientific Discovery* [6], pages 25–46.

[9] Jaakko Hintikka, Ilpo Halonen, and Arto Mutanen. Interrogitive logic as a general theory of reasoning. In *Inquiry as Inquiry: A Logic of Scientific Discovery* [6], pages 47–90.

[10] Dagmar Provijn. How to obtain elegant Fitch-style proofs from Goal directed ones. to appear.