Hypocrisie binnen de wiskunde?

Albrecht HEEFFER
Centrum voor Logica en Wetenschapsfilosofie
Universiteit Gent
albrecht.heeffer@ugent.be

> Mon enthousiasme pour les mathématiques avaient peut-être eu pour base principale mon horreur pour l'hypocrisie; l'hypocrisie à mes yeux, c'était ma tante Séraphie, Mme Vignon, et leurs prêtres. Suivant moi, l'hypocrisie était impossible en mathématiques, et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que: moins par moins donne plus?
>
> (Uit *Het leven van Henry Brulard* door Stendhal, 1890)

1. Inleiding

Het bovenstaand citaat geeft de woorden weer van Henry Brulard, of beter Marie-Henri Beyle, de echte naam achter het pseudoniem Stendhal. Hij maakt zich druk over het feit dat niemand hem kan uitleggen waarom min maal min gelijk is aan plus. Hij klaagt de hypocrisie aan van de wiskunde of althans van diegenen die wiskunde onderwijzen. Waarom worden deze tekenregels door iedereen als vanzelfsprekend voorgesteld terwijl ze dat, tenminste voor Stendhal, helemaal niet zijn? Deze vraag is terecht. Als we de geschiedenis van de wiskunde bekijken dan zien we dat operaties met negatieve getallen gedurende meerdere eeuwen als zeer problematisch werden ervaren. Bekende wiskundigen en filosofen zoals Arnauld, Leibniz, Wallis, Euler en d'Alembert hadden ernstige bedenkingen bij deze regels. Als er dergelijke intrinsieke problemen zijn gerezen bij het ontstaan van het concept van een negatief getal, waarom maken we er ons zo gemakkelijk van af in het onderwijs? Afhankelijk van de onderwijsprogramma's die verschillen tussen landen en onderwijssystemen, worden de tekenregels aangeleerd aan kinderen tussen 10 en 13 jaar. In deze bijdrage geven we kort de belangrijkste historische argumenten weer tegen de tekenregels, vooral met betrekking tot de getallenlijn, het belangrijkste instrument voor het aanleren van negatieve getallen. We tonen aan dat reeds vroeg in de geschiedenis van de Europese wiskunde bewijzen bestonden voor en tegen de regels. Steunend op de geschiedenis van negatieve getallen binnen de wiskunde pleiten we voor een introductie van negatieve getallen in het onderwijs binnen de context van symbolische algebra.

2. Tegen de getallenlijn

De getallenlijn is tegenwoordig één van de meest gebruikte instrumenten voor het aanleren van natuurlijke en reële getallen in het lager en secundair onderwijs. Hans Freudenthal (1983, 101) noemt de getallenlijn een "device beyond praise" en ziet het ook als één van de beste middelen om operaties op negatieve getallen aan te leren (ibid. p. 437). In veel landen gebeurt dit vanaf het vijfde leerjaar (Howson, Harries and Sutherland, 1999). Ondanks het feit dat de getallenlijn een algemeen aanvaard instrument is blijkt het gebruik ervan in het wiskunde onderwijs relatief nieuw te zijn. Het vroegste gebruik kunnen we situeren in de jaren vijftig van de vorige eeuw. (Een aantal websites hebben de historiek van de getallenlijn gereconstrueerd: http://members.aol.com/jeff570/ van Jeff Miller, en http://www.pballew.net/mathbooks.html van Patt Ballew zijn de meest bruikbare). Max Beberman, bekend van vele innovaties binnen het wiskundeonderwijs bedacht ook de getallenlijn voor het aanleren van negatieve getallen. Eén van de vroegste referenties is: “In teaching subtraction of signed numbers, I first draw a number scale” (Beberman and Meserve, 1956). Welke argumenten kunnen nu worden aangevoerd tegen dit mentale instrument?

2.1. Antoine Arnauld (1612–1694)

Al heeft Arnauld het niet opgevat als een aanval op de getallenlijn, toen hij de discussie aanging over proporties met negatieve getallen bedacht hij een sterk argument tegen haar gebruik. Neem een willekeurig punt n op de lijn van natuurlijke getallen, de verhouding van de buren $n + 1$ tot $n - 1$ is altijd groter dan de verhouding van $n - 1$ to $n + 1$. Deze eigenschap van de getallenlijn vervalt als we negatieve getallen toevoegen.

Antoine Arnauld schreef een bekend filosofisch werk binnen de Cartesiaanse traditie, gekend onder de naam *La Logique de Port-Royal* (Arnauld, 1662), maar publiceerde ook een *Geometrie* (Arnauld, 1667). In dat laatste boek geeft hij een voorbeeld van symbolische operaties die hij tegenstrijdig acht met onze basisintuïties over grootheden en proporties. Zijn redenering is als volgt: Neem twee getallen, een groot en een kleiner. De verhouding van het groot tegen het kleiner is vanzelfsprekend groter dan de verhouding van het kleiner tegen het grote. Maar als we de getallen 1 en – 1 nemen voor het grote en het kleine dan zou dit betekenen dat:

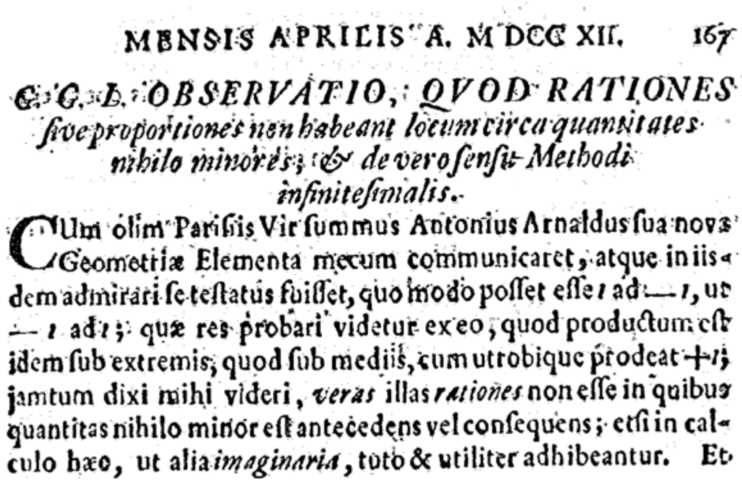
$$\frac{1}{-1} > \frac{-1}{1} \qquad (1.1)$$

wat in tegenspraak is met de regels van de algebra. Als we nu rekening houden met het aantal keer dat dit argument aangehaald en aangevallen werd tijdens de zeventiende en achttiende eeuw, dan kunnen we wel spreken van een radicale tegenstelling tussen de traditionele proportieleer, zoals die gekend was van het *quadrivium*, en de nieuwe symbolische algebra die als volwassen mag worden beschouwd vanaf Descartes (1637). Prestet in zijn *Elemens des mathematiques* van 1675 was de eerste om Arnauld te beantwoorden (zie Schrecker 1935 en meer recent Mancosu 1996, 88-91 en Schubring 2005, 52-61). De houding van Prestet bestaat er in dat hij grootheden steeds als positief beschouwt en dat tekens verwijzen naar operaties. Het vormt geen probleem om een getal af te trekken van een kleiner getal maar het negatieve resultaat betekent niet meer dan dat: een grotere kwantiteit afgetrokken van een kleinere. En als we werken met geometrische proporties dan moeten we tekens hoe dan ook achterwege laten.

2.2. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Leibniz vond het probleem van Arnauld relevant genoeg om er een artikel aan te wijden in *Acta eruditorum* (Leibniz, 1712, 167), één van de eerste wetenschappelijke tijdschriften (zie Figuur 1). Leibniz begint zijn betoog met de erkenning van het probleem als authentiek. Voor een correcte interpretatie verwijst hij naar symbolische berekeningen zoals we die uitvoeren met complexe getallen. Ook daar passen we specifieke regels toe die op zich bepalen wat die getallen eigenlijk inhouden. Als we de tekenregels toepassen voor de deling van getallen dan is er geen enkel probleem: een positief getal gedeeld door een negatief geeft een negatief, dus:

$$\frac{1}{-1} = -\frac{1}{1} \qquad (1.2)$$


MENSIS APRILIS A. MDCCXII. 167

G. G. L. *OBSERVATIO, QUOD RATIONES sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores; & de vero sensu Methodi infinitesimalis.*

Cum olim Parisiis Vir summus Antonius Arnaldus sua nova Geometriæ Elementa mecum communicaret, atque in iisdem admirari se testatus fuisset, quo modo posset esse *1* ad *−1*, ut *−1* ad *1*; quæ res probari videtur ex eo, quod productum est idem sub extremis, quod sub mediis, cum utrobique prodeat *+1*; jamtum dixi mihi videri, *veras* illas *rationes* non esse in quibus quantitas nihilo minor est antecedens vel consequens; etsi in calculo hæc, ut alia *imaginaria*, tuto & utiliter adhibeantur. Et

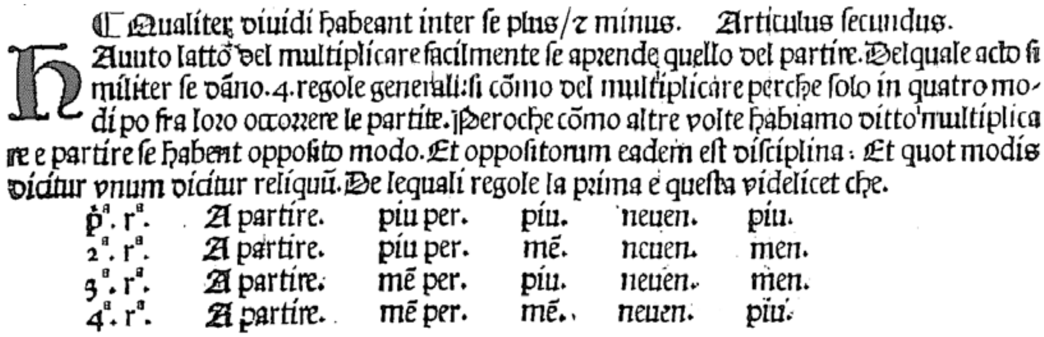
Figuur 1: Leibniz's antwoord op Arnauld in *Acta eruditorum* van 1712

2.3. The abbaco traditie (1200-1500)

Wie deze zeventiende-eeuwse discussies volgt, kan misschien verrast zijn dat de symbolische interpretatie die Leibniz voorstelt, goed ingeburgerd was in de zogenaamde *abbaco* traditie in Italië tegen het einde van de vijftiende eeuw. Hoewel symbolen toen nog niet op een consequente manier werden gebruikt, zien we toch dat de rekenmeesters binnen de *abbaco* traditie geen probleem hadden met deze soort symbolische operaties. We hebben elders aangetoond dat de introductie van symbolen, zoals plus en min, gebeurde binnen een algebraische context en na een proces van symbolisch denken. De introductie van symbolen is dus het resultaat van een historisch ontwikkeling, niet het begin ervan (Heeffer 2008).

De epistemische geldigheid van operaties met negatieve getallen binnen de abbaco traditie is bepaald door het geloof in de correctheid van de operaties die gepaard gaan met irrationele binomialen (vb. $5 - \sqrt{5}$). Vrij vroeg in de algebra beoefening van *abbaco* rekenmeesters zien we een "bewijs" voor de tekenregels. Dit is het soort verantwoording die Marie-Henri Beyle, of Stendhal, vroeg. Voor zover we weten is het vroegste bewijs in Europa dat van Maestro Dardi van c.1380 in een tekst met de titel *Aliabraa argibra* (f. 5^v, Franci 2001, 44). Het bewijs komt in dezelfde vorm maar met verschillende getalvoorbeelden regelmatig terug in de vijftiende eeuw. De redenering gaat als volgt: we weten dat 8 maal 8 gelijk is aan 64. Daarom moet (10 – 2) maal (10 – 2) ook gelijk zijn aan 64. Een dergelijke vermenigvuldiging gebeurde in de Renaissance volgens een geijkte manier met de naam *per casella*, (letterlijk: volgens het poortje van een duivenkot, zie Swetz 1987, 201-205). Eerst vermenigvuldig je 10 met 10 wat honderd geeft, dan twee keer 10 maal – 2 of dus – 20. Het resultaat hiervan is dus 60. Om vervolgens aan 64 te komen moet het laatste product van – 2 en – 2 dus noodzakelijk gelijk zijn aan + 4. Daarom is een negatief getal vermenigvuldigd met een negatief altijd positief. In hedendaagse terminologie zouden we zeggen dat dit bewijs gebaseerd is op de distributie-wet binnen de rekenkunde.

Op het einde van de vijftiende eeuw zien we de tekenregels uitgedrukt in een meer formele manier. Luca Pacioli is de eerste die de regels formuleert op een abstracte wijze zonder te verwijzen naar specifieke grootheden (see Figuur 2).


Qualiter diuidi habeant inter se plus/z minus. Articulus secundus.

Hauuto latto del multiplicare facilmente se aprende quello del partire. Del quale acto similiter se dano .4. regole generali: si cõmo del multiplicare perche solo in quatro modi po fra loro occorrere le partite. Peroche cõmo altre volte habiamo ditto multiplicare e partire se habent opposito modo. Et oppositorum eadem est disciplina. Et quot modis dicitur vnum dicitur reliquũ. De lequali regole la prima e questa videlicet che.

pª. rª.	A partire.	piu per.	piu.	neuen.	piu.
2ª. rª.	A partire.	piu per.	mẽ.	neuen.	men.
3ª. rª.	A partire.	mẽ per.	piu.	neuen.	men.
4ª. rª.	A partire.	mẽ per.	mẽ.	neuen.	piu.

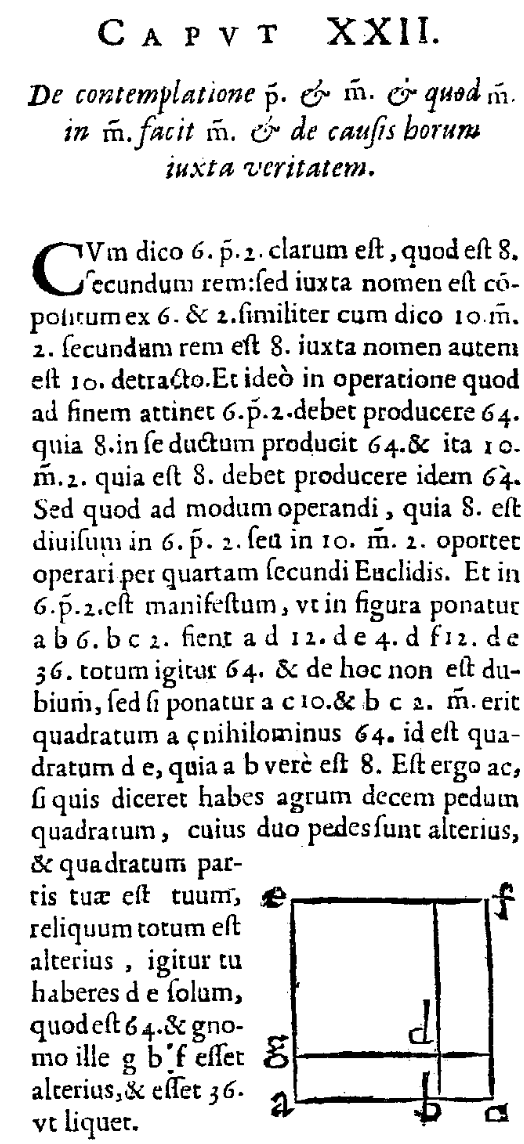
Figuur 2: Pacioli's tekenregels voor deling van de *Summa* (1494, f. 113r)

Belangrijk voor ons verhaal is dat Pacioli deze regels bespreekt in distinctie 8, waar hij alles voorbereidt voor zijn behandeling van algebra. De regels verwijzen niet naar specifieke grootheden zoals natuurlijke getallen, binomialen of proporties. Hij verwijst enkel naar *più*, "positief" en *meno*, "negatief". Zonder dat er hier sprake is van het gebruik van symbolen beschouwen we dit als een typisch voorbeeld van vroeg symbolisch redeneren. Volgens Leibniz is dit de wijze waarmee je moet omgaan met de ogenschijnlijke anomalie van Arnauld. Vergeet met welke waarden je bezig bent, je moet alleen de tekenregels correct toepassen en je komt aan (1.2).

2.4. Girolamo Cardano (1501 – 1576)

Cardano heeft belangrijke bijdragen geleverd voor de aanvaarding van negatieve getallen die echter niet zo goed gekend zijn. Hij kan beschouwd worden als de eerste die een afdoende argumentatie heeft gegeven voor het aanvaarden van negatieve getallen als oplossingen van lineaire vergelijkingen en de eerste die kwam tot wortels van negatieve getallen bij kwadratische vergelijkingen. We hebben deze twee bijdragen al eerder toegelicht (Heeffer 2007). We zullen het verder enkel hebben over zijn merkwaardige twijfels bij de tekenregels aan het einde van zijn wiskundige carrière.

Enkele jaren voor zijn dood schreef Cardano twee traktaten waarin hij terugkomt op zijn eerdere behandeling van negatieve en imaginaire getallen in de *Ars Magna* (1545). De eerste draagt de titel *De Aliza Regulae* gepubliceerd in 1570 als deel van het uitgebreide *De Propotionibus* en het tweede is *Sermo de*


CAPVT XXII.

De contemplatione p̃. & m̃. & quod m̃. in m̃. facit m̃. & de causis horum iuxta veritatem.

Cum dico 6. p̃. 2. clarum est, quod est 8. secundum rem: sed iuxta nomen est cõpositum ex 6. & 2. similiter cum dico 10. m̃. 2. secundum rem est 8. iuxta nomen autem est 10. detracto. Et ideò in operatione quod ad finem attinet 6. p̃. 2. debet producere 64. quia 8. in se ductum producit 64. & ita 10. m̃. 2. quia est 8. debet producere idem 64. Sed quod ad modum operandi, quia 8. est diuisum in 6. p̃. 2. seu in 10. m̃. 2. oportet operari per quartam secundi Euclidis. Et in 6. p̃. 2. est manifestum, vt in figura ponatur a b 6. b c 2. fient a d 12. d e 4. d f 12. d e 36. totum igitur 64. & de hoc non est dubium, sed si ponatur a c 10. & b c 2. m̃. erit quadratum a ç nihilominus 64. id est quadratum d e, quia a b verè est 8. Est ergo ac, si quis diceret habes agrum decem pedum quadratum, cuius duo pedes sunt alterius, & quadratum partis tuæ est tuum, reliquum totum est alterius, igitur tu haberes d e solum, quod est 64. & gnomo ille g b f esset alterius, & esset 36. vt liquet.

Figuur 3: Cardano's weerlegging van de tekenregels

plus and minus dat pas na zijn dood verscheen in zijn verzameld werk (Cardano 1663, IV, 435-439). Van bijzonder belang is zijn “weerlegging” van het bewijs van de abbaco rekenmeesters dat we eerder behandelden. Hij neemt hetzelfde voorbeeld als Maestro Dardi om het tegendeel te beweren: min maal min geeft niet noodzakelijk plus!

Misschien moeten we volledigheidshalve er bij vermelden dat het woord *Aliza* in de titel van het traktaat afgeleid is van de Latijnse verbastering van het Arabisch *a’izzā* wat zoveel betekent als ‘riskant’ of zelfs ‘twijfelachtig’ (Tanner 1980, 162). Ook wordt er wel eens afstand genomen van Cardano zijn latere teksten omdat men vermoedt dat hij bijna seniel was tegen zijn dood in 1576. Toch blijft zijn argumentatie interessant. Ze komt zowel voor in de *Aliza* als in de *Sermo* maar we beperken ons tot de eerste, waarbij hij dezelfde waarden neemt als Maestro Dardi (zie het diagram in Figuur 3).

Het product van 10 met 10 kan worden voorgesteld door een vierkant met zijde *ac*. Gegeven dat *bc* en *ag* gelijk zijn aan 2, heeft het vierkant *egd* dus een oppervlakte van 64. Om van 100 (vierkant *acef*) te komen aan 64 (vierkant *egd*) moeten we dus de rechthoeken *cg* en *bf* aftrekken. Maar als we beiden aftrekken dan hebben we het vierkant *cd* tweemaal verwijderd. Daarom moeten we *cd* opnieuw bijtellen. Dus rekenkundig hebben we

$$100-(10\times 2)-(10\times 2)+(2\times 2)=64\,.$$

Dit is de uitwerking van (10 – 2)(10 – 2) zoals we gezien hebben in het bewijs van Maestro Dardi. Cardano argumenteert nu dat de + 4 niet het resultaat is van het product – 2 met – 2 maar een oppervlak dat we moeten toevoegen omdat we tweemaal (10 x 2) hebben afgetrokken. Hij refereert daarbij naar propositie 7 van boek II van Euclides en besluit: “Vandaar de fout die men algemeen begaat om min maal min gelijk te stellen met plus, terwijl het inderdaad niet juister is dan te stellen dat min maal plus gelijk is aan plus, of plus maal plus gelijk zou zijn aan min” (Cardano 1663, IV, 399: “Et ideo patet communis error dicentium, quod m . in m. producit p. neque enim magis m. in m. producit p. quam p. in p. producat m.”, mijn vertaling). Terwijl Cardano hier twijfelt aan de geldigheid van de tekenregels, maakt hij geen fouten in algebraische afleidingen die steunen op deze regels. Vanwaar dan zijn fulminaties? Tanner schijnt te geloven dat dit een typische uiting is van de rebel binnen Cardano, iets wat wel gelezen en geapprecieerd werd door velen in privé, maar snel werd afgewezen en doodgezwegen (Tanner, 1980: Cardano “appears unique only in putting into print something of a rebel trend of thought, entertained in private by the majority, but soon to be disavowed by silent suppression”). Schubring (2005, 45) echter gelooft in epistemologische motieven omdat Cardano de vermenging van de operaties aftrekken en vermenigvuldigen als problematisch beschouwde. Voor ons is het opvallend dat Cardano hetzelfde voorbeeld van Dardi gebruikt. Het lijkt er op te wijzen dat Cardano ontevreden was met de epistemische geldigheid van de algemeen aanvaarde tekenregels en met de rechtvaardiging in de stijl van Dardi. Door het tegengestelde te bewijzen, gaf hij uiting aan het zelfde ongenoegen dat door Stendhal als hypocrisie werd beschouwd.

2.5. Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

De discussie was niet afgelopen met Leibniz. Meerder auteurs van de achttiende eeuw komen terug op de vraag gesteld door Arnauld, o.m. Rolle (1690, 14-22) en Maclaurin (1748, 6-7). Deze laatste refereert niet naar Arnauld maar wel indirect naar de discussie. Hij beschouwt – *a* en + *a* gelijk als kwantiteit maar dat betekent niet dat je kan stellen dat + *a* = – *a*. De twee hebben een tegengestelde kwaliteit en “on account of this contrariety a negative quantity is said to be less than nothing”.

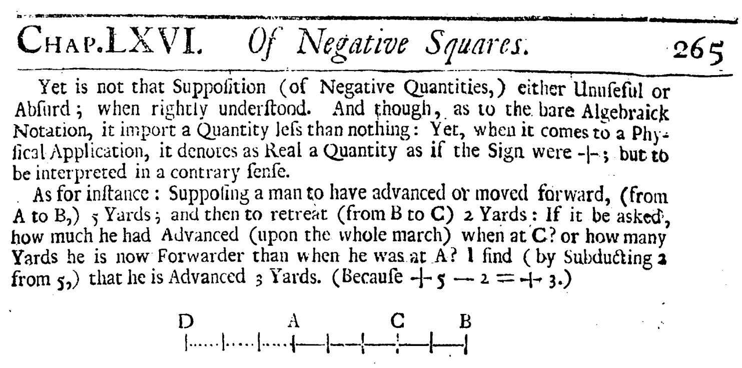
Maar diegene die met de meeste volharding en consequentie de strijd tegen de getallenlijn heeft gevoerd is wel d'Alembert. Zowel in de bekende *Encyclopédie* als in zijn *Opuscules* gaat hij tekeer tegen het beeld van getallen kleiner dan niets. We mogen de invloed van d'Alembert niet onderschatten. Hij was niet alleen een gewaardeerd wiskundige, door zijn connecties in Koninklijke kringen was hij iemand die een invloed had op de opinie. Zijn talrijke bijdragen over wiskunde in de encyclopedie werden tot lang na zijn dood gelezen. Over het begrip 'negatief' schrijft hij: "negatieve getallen zijn getallen die voorzien worden van een minteken en die door meerdere wiskundigen beschouwd worden als kleiner dan nul. Dit laatste idee is vals zoals we verder zullen zien" (Diderot and d'Alembert, 1761-1790, 22, 289). Zijn argumentatie is gelijklopend met die van Wallis (1656) en Euler (1754/5) die beiden geloofden dat de deling van positief door negatief groter is dan oneindig (zie Heeffer 2008b). Je kan niet zo maar beweren dat negatieve getallen kleiner zijn dan nul omdat de overgang van positief naar negatief niet altijd via nul loopt. In eenvoudige gevallen zoals bvb $y = x - a$, loopt y inderdaad van positief over nul naar negatief. Maar in het geval dat $y = 1/(x - a)$ is $y = \infty$ als $x = a$ (ibid. p. 300). In tegenstelling met Wallis and Euler, geloofde d'Alembert wel dat

$$y = \frac{1}{-a}$$

negatief is, maar de overgang gaat via ∞. Daarom is het verkeerd te beweren dat negatieve getallen (altijd) kleiner zijn dan nul. Zonder Arnauld te vermelden, geeft hij ook commentaar op de ogenschijnlijke anomalie waarmee we gestart zijn: "Diegene die stellen dat -1 zich niet kan verhouden tot $+1$ maken een dubbele fout. Ten eerste voeren we dagelijks dergelijke operaties uit en ten tweede is het product van -1 met -1 gelijk aan dat van $+1$ met $+1$ wat bevestigt dat 1 zich verhoudt tot -1 als -1 tot 1" (ibid. p. 299).

3. Conclusie

Alvorens tot ons besluit te komen geven we nog een antwoord op de vraag wie voor het eerst de getallenlijn gebruikt heeft voor negatieve getallen. Het antwoord vinden we in de tekstenverzameling van Smith (1956, 46-7): John Wallis (zie Figuur 4). Het fragment vormt een duidelijk bewijs dat het standpunt van Wallis verkeerd begrepen is als dat negatieve getallen groter zouden zijn dan oneindig (door o.m. William Rouse Ball (1912, 293) "It is curious to note that Wallis rejected as absurd the now usual idea of a negative number as being less than nothing, but accepted the view that it is something greater than infinity" en Morris Kline (1972; 1990, 253) "Though Wallis was advanced for his times and accepted negative numbers, he thought they were larger than infinity but not less than zero").


CHAP.LXVI. *Of Negative Squares.* 265

Yet is not that Suppoſition (of Negative Quantities,) either Unuſeful or Abſurd; when rightly underſtood. And though, as to the bare Algebraick Notation, it import a Quantity leſs than nothing: Yet, when it comes to a Phyſical Application, it denotes as Real a Quantity as if the Sign were $+$; but to be interpreted in a contrary ſenſe.

As for inſtance: Suppoſing a man to have advanced or moved forward, (from A to B,) 5 Yards; and then to retreat (from B to C) 2 Yards: If it be asked, how much he had Advanced (upon the whole march) when at C? or how many Yards he is now Forwarder than when he was at A? I find (by Subducting 2 from 5,) that he is Advanced 3 Yards. (Becauſe $+5 - 2 = +3$.)

Figuur 4: John Wallis gebruikt als eerste de getallenlijn in zijn *Algebra*

De getallenlijn is dus oorspronkelijk geintroduceerd met de bedoeling om operaties op negatieve getallen uit te leggen: “Als een man 5 m vooruit stapt vanuit A en hij keert dan 8 m terug, hoe ver is hij dan verwijderd van zijn startpunt?”. Wallis geeft als antwoord – 3 op dezelfde wijze zoals het nu wordt aangeleerd in het lager onderwijs. Ook Newton (1707, 3) volgt Wallis in het gebruik van de getallenlijn voor het optellen en aftrekken van negatieve getallen.

Als we de vele discussies en controversen van de zeventiende en achttiende eeuw als maatstaf nemen, dan hoeft het ons niet te verbazen dat het aanleren van negatieve getallen ook in de praktijk tot problemen kan leiden. De geschiedenis leert ons dat er intrinsieke epistemische moeilijkheden zijn met bepaalde wiskundige concepten, en negatieve getallen is er daar één van. Daarom argumenteren we ook dat de geschiedenis van de wiskunde belangrijk is voor diegenen die wiskunde onderwijzen. Niet voor de mooie plaatjes als illustraties maar om onderwijzers voor te bereiden op potentiële conceptuele problemen in de klas. Maar we kunnen verder gaan. Is het inderdaad niet hypocriet om wiskunde voor te stellen als een maatstaf van absolute zekerheid waarin alles wat waar is kan bewezen worden? Want dat is wiskunde beslist niet. Moeten leerlingen afgeschermd worden van conceptuele problemen of veranderende betekenissen van wiskundige concepten door de eeuwen heen? Het betrekken van historische discussies zoals deze in het onderwijs geeft leerlingen tenminste mee dat wiskunde een product is van menselijk denken, onderhevig aan veranderende conceptualisaties en methodes. In die zin is het gebruik van de getallenlijn wat te simpel en onderhevig aan heel wat bezwaren.

In het zeer aardige en leesbare boek *Imagining numbers*, spendeert de topwiskundige Barry Mazur heel wat aandacht aan de vraag waarom we aanvaarden dat min maal min plus is. Hij besluit dat “er, in feite, één en slechts één manier is om de definitie van vermenigvuldiging uit te breiden van natuurlijke naar alle getallen, zowel postief als negatief. Als we willen (en we willen!) dat 1 maal N gelijk is aan N, en we willen (inderdaad!) dat distributiviteit geldig is” (Mazur 2003, 102-3). Dit zou pleiten voor het aanleren van het bewijs zoals we dat kennen van de abbaco meesters. Naar onze mening echter, rekening houdend met de context waarin negatieve getallen zijn geïntroduceerd in de geschiedenis, is de definitie van d’Alembert zeer aantrekkelijk. Negatieve getallen zijn die getallen die voorzien zijn van een minteken, duidelijk verwijzend naar het symbolische karakter. Dit vat de essentie van hoe om te gaan met negatieve getallen via symbolische manipulaties. Dit pleit er voor dat het concept van een losstaande negatieve kwantiteit best wordt aangeleerd binnen de context van de eerste algebra lessen.

4. Bibliografie

Arnauld, Antoine and P. Nicole, 1662, *La logique, ou, L'art de penser contenant, outre les règles communes, plusieurs observations nouvelles propres à former le jugement*, Charles Savreux, Paris, Engelse vertaling, J. Vance Buroker (ed.) (1996) *Logic, or the Art of Thinking*, Cambridge University Press, Cambridge.

Arnauld, Antoine, 1667, *Nouveaux Éléments de géométrie*, C. Savreux, Paris.

d’Alembert, Jean le Rond, 1761-1780, *Opuscules mathémathiques ou Mémoires sur différens sujets de géométrie, de méchanique, d’optique, d’astronomie*, Paris : David : [then] Briasson : [then] C.-A. Jombert, 8 vols. in 7 books.

Ball, Walter William Rouse, 1912, *A Short Account of the History of Mathematics*, London, Macmillan and co. (Dover reprint, 1960)

Beberman, Max and Meserve, Bruce E., 1956, “An exploratory approach to solving equations”, *The Mathematics Teacher*, January 1956.

Cardano, Girolamo, 1545, *Ars Magna*, Johann Petreius, Nürnberg, (Engelse vertaling door Witmer, R. T., 1968, *Ars Magna or the Rules of Algebra*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., Reprinted by Dover Publications, New York, 1993).

Cardano, Girolam, 1663, *Opera omnia* (10 vols.), Jean Antoine Huguetan and Marc Antione Ravaud, Lyon.

Diderot, Denis and Jean le Rond d'Alembert (eds.) 1765, *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (17 vols.), Briasson, Paris (ed. 1779-82, 36 vols., Sociétés typographiques, Lausanne).

Euler, Leonhard, 1754/55, De seriebus divergentibus, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5, (1760, p. 205-237), reprinted in *Opera Omnia* I, vol. 14, p. 585-617.

Freudenthal, Hans, 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht: Reidel.

Heeffer, Albrecht, 2007, "Abduction as a strategy for concept formation in mathematics: Cardano postulating a negative", in Olga Pombo and Alexander Gerner (eds.) *Abduction and the Process of Scientific Discovery*, Colecçáo Documenta, Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, pp. 179-194.

Heeffer, Albrecht, 2008a, "The emergence of symbolic algebra as a shift in predominant models", *Foundations of Science* (te verschijnen).

Heeffer, Albrecht, 2008b, "Negative numbers as an epistemic difficult concept: some lessons from history", in Constantinos Tzanakis (ed.) *Proceedings of the History and Pedagogy of Mathematics Conference*, 14-18 July 2008, Mexico (te verschijnen)

Kline, Morris, 1972, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford: Oxford University Press, (reprinted in 3 vols. 1990).

Howson, A. G., Harris T. and R Sutherland, 1999, *Primary school mathematics textbooks*, London, Qualifications and Curriculum Authority.

Leibniz, Gottfried, Wilhelm, 1712, "Observatio, quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores, & de vero sensu methodi infinitesimalis", *Acta eruditorum*, pp. 167-9.

Newton, Isaac, 1707, *Arithmetica universalis; sive de compositione et resolutione arithmetica liber. Cui accessit Hallieana Æquationum radices arithmetice inveniendi methodus*, Typis Academicis, Cambridge.

MacLaurin, Colin, 1748, *A treatise of algebra in three parts: containing, I. The fundamental rules and operations, II. The composition and resolution of equations of all degrees, and the different affections of their roots, III. The application of algebra and geometry to each other: to which is added an appendix concerning the general properties of geometrical lines*, A. Millar and J. Nourse, London.

Mancosu, Paolo, 1996, *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*, Oxford: Oxford University Press.

Mazur, Barry, 2003, *Imagining Numbers (particularly the square root of minus fifteen)*, London: Penguin.

Prestet, Jean, 1675, *Elemens des mathematiques, ou Principes generaux de toutes les sciences, qui ont les grandeurs pour objet. Contenant vne methode covrte et facile pour comparer ces grandeurs & pour découvrir leurs rapports par le moyen des caracteres des nobres, & des lettres de l'alphabeth* .., Paris : A. Pralard.

Rolle, Michel, 1690, *Traité d'algebre; ou, Principes generaux pour resoudre les questions de mathematique*, Chez Etienne Michallet, Paris.

Schrecker, P., 1935, "Arnauld, Malebranche, Prestet, et la Theorie des Nombres Negatifs", *Thalès*, 2, pp.82-90.

Schubring, Gert, 2005, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition, Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17-19th Century France and Germany*, Heidelberg : Springer.

Smith, David Eugene, 1959, *A Source Book in Mathematics*, New York: Dover.

Tanner, R.C.H., 1980, The Alien Realm of the Minus : Deviatory Mathematics in Carano's Writings, *Annals of Science*, 37, pp. 159-178

Wallis, John, 1656, *Johannis Wallisii, SS. Th. D. geometriae professoris Saviliani in celeberrimâ academia Oxoniensi, operum mathematicorum pars altera qua continentur de angulo contactus & semicirculi, disquisitio geometrica. De sectionibus conicis tractatus. Arithmetica infinitorum: sive de curvilineorum quadraturâ, &c. Ecclipseos Solaris observatio*, Oxonii : typis Leon: Lichfield academiae typographi, veneunt apud Octav. Pullein Lond. Bibl.

Wallis, John, 1685, *A treatise of algebra, both historical and practical shewing the original, progress, and advancement thereof, from time to time, and by what steps it hath attained to the heighth at which it now is: with some additional treatises ... Defense of the treatise of the angle of contact. Defense of the treatise of the angle of contact. Discourse of combinations, alternations, and aliquot parts. Discourse of combinations, alternations, and aliquot parts*, London : Printed by John Playford, for Richard Davis.